

Monte Karlo simulacija laserskog hlađenja

U ovom radu predstavili smo Monte Karlo simulaciju laserskog hlađenja Ca^+ jona u jednodimenzionalnom modelu sa dva energetska nivoa. Za svaki set parametara, temperatura je opadala kada je frekvencija lasera ν_L bila veća od frekvencije ν_0 koja predstavlja prelaz između dva energetska nivoa. Dobili smo zavisnost minimalne temperature T_{\min} od $\nu_L - \nu_0$, odakle smo izmerili optimalnu vrednost frekvencije lasera ν_L . Takođe smo dobili zavisnost efikasnosti hlađenja od ν_L .

Uvod

Teorijska pozadina laserskog hlađenja

Lasersko hlađenje je metod hlađenja atoma sa kojim je moguće ohladiti gas do veoma niskih temperatura, specifičnih za vrstu atoma (Lubkin 1996). Metod predstavlja tretiranje izolovanog atoma laserskim zrakom. Zbog Doplerovog efekta, fotoni bivaju absorbovani najvećim delom od strane jona koji se kreću prema njima. Pri absorbovanju atomu se predaje i određeni impuls koji u najvećem broju slučajeva usporava atom. Nakon absorbovanja, atom spontano emituje foton u proizvoljnom pravcu, i samim tim dobija impuls u suprotnom smeru. Ako postavimo šest lasera na šest različitih strana, dobićemo smanjenje brzine svih atoma, čime se direktno smanjuje i njihova brzina

Stiven Ču (Steven Chu) je 1985. godine sa svojim saradnicima započeo rad na projektu laserskog hlađenja. Oni su dostizali temperature približno 10^{-9} K (Phillips i Metcalf 1987), u zavisnosti od karakteristika samog atoma i lasera kojim je taj atom tretiran. Uz pomoć laserskog hlađenja i magnetne zamke postalo je moguće zarobiti atom u malom prostoru sa malom brzinom. Takve atome je lakše izolovati i koristiti za posmatranja u nekim drugim istraživanjima.

*Miloš Srećković
(1987), Šabac,
Vojvode Mišića 1/4,
učenik 2. razreda
Matematičke
gimnazije u Beogradu*

Model koji smo mi proučavali je jednodimenzionalan. Atomi su postavljeni između dva lasera koji ih tretiraju fotonima sa obe strane (Cohen-Tannoudji i Phillips 1990). Posle absorbovanja fotona, atom ga spontano eksituje u izotropnom pravcu. Absorbciona kriva, koja predstavlja zavisnost verovatnoće absorpcije od frekvencije fotona je za Ca^+ jone data Lorencovom distribucijom:

$$\varphi(\nu) = \frac{\frac{G}{2\pi}}{(\nu - \nu_0)^2 + \frac{G^2}{4}} \quad (1)$$

gde je G širina absorpcione krive, a ν_0 frekvencija fotona koja odgovara razlici između energetske nivoa. Ove vrednosti zavise od samog atoma na kome se vrši hlađenje. Za Ca^+ jon vrednosti parametara G i ν_0 za prelaz između nivoa $4P_{1/2}$ i $4S_{1/2}$ uzete su iz rada Lankastera i saradnika (Lancaster *et al.* 2003).

Verovatnoća da se absorpcija dogodi za vreme t je data jednačinom:

$$p(t) = \varphi(\nu') e^{-\varphi(\nu') t} \quad (2)$$

gde je ν' frekvencija fotona iz referentnog sistema vezanog za atom, koja je data formulom za Doplerov efekat:

$$\nu' = \left(1 + \frac{V}{c}\right) \nu_L \quad (3)$$

gde je V brzina atoma po x-osi, a ν_L frekvencija lasera. U formuli (2) skalirali smo spoljašnje parametre kao što je fluks lasera.

U našoj simulaciji je potrebno odrediti moment absorpcije. Da bismo to uradili potrebno je da generišemo slučajan broj po distribuciji datoj jednačinom (2). Ovo se postiže rešavanjem sledeće jednačine po t (Press *et al.* 1994):

$$r = \int_0^t p(t') dt' \quad (4)$$

gde je r slučajan broj iz intervala (0, 1) po uniformnoj raspodeli, što daje:

$$t = -\frac{\ln(1-r)}{\varphi(\nu')} \quad (5)$$

Koristeći se ovim algoritmom, izračunavamo vremena absorpcije za oba lasera. Računa se absorpcija fotona od lasera čije je vreme manje. Zatim se izračunava novi impuls atoma tako što se starom doda impuls fo-

tona. Verovatnoća da eksitovani atom spontano emituje foton posle vremena t je data jednačinom:

$$t = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \exp\left(-\frac{\ln 2}{t_{1/2}} t\right) \quad (6)$$

gde je $t_{1/2}$ period polu raspada eksitovanog stanja. Koristeći isti algoritam za generisanje slučajnih brojeva dobijamo:

$$t = -\frac{\ln(1-r)}{\ln 2} t_{1/2} \quad (7)$$

Nakon emitovanja fotona u izotropnom pravcu, računa se novi impuls atoma.

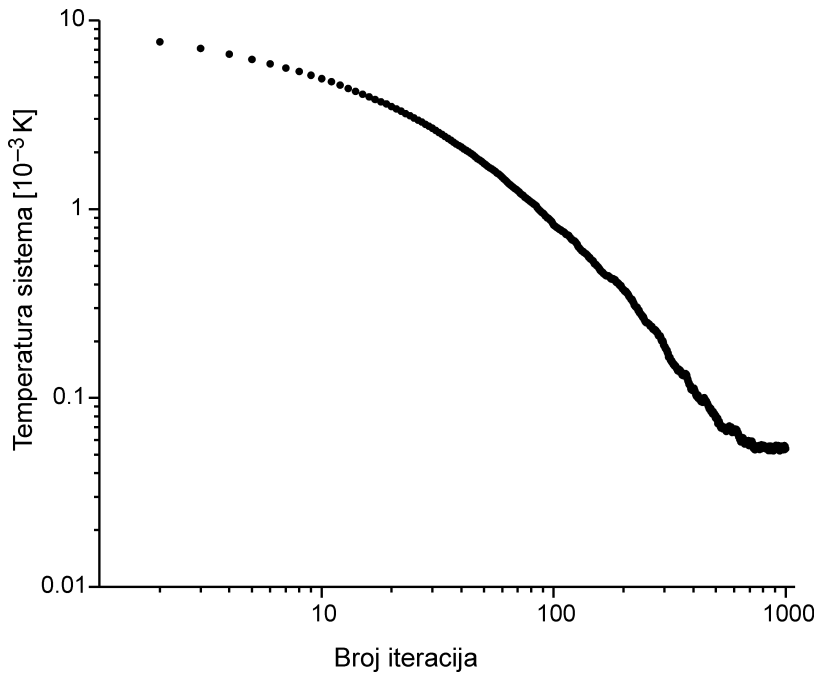
Monte Karlo simulacije

Monte Karlo simulacije su one koje za svoja izračunavanja koriste slučajne brojeve. Slučajni brojevi koje računar može da nam da su pseudoslučajni brojevi jer se izračunavaju po određenom algoritmu. Ipak, pokazuje se da postoje generatori koji generišu brojeve koji su statistički ekvivalentni pravim slučajnim brojevima. Brojevi koje generišemo na ovaj način su dati po uniformnoj raspodeli. Takođe je moguše dobijati slučajne brojeve po određenoj funkcionalnoj raspodeli (Press *et al.* 1994). Ono što ovu simulaciju čini Monte Karlo je upravo korišćenje slučajnih brojeva dobijenih po zadatoj raspodeli.

Metod

Simulacija je napisana u programskom jeziku Delphi 6.0. Ulazni podaci su: širina absorpcione krive, broj jona, početna temperatura, period polu raspada eksitovanog stanja, interval između dva koraka (u simulaciji), broj koraka i $P = (v - v_0)/G$. Za svaki jon pamtimo sledeće informacije: brzinu, vreme do sledeće absorpcije ili emisije fotona i da li je trenutno eksitovan ili ne. Za set ulaznih parametara, simulacija izračunava najnižu tepeaturu. Trenutna temperatura se beleži pri svakom koraku, pa je moguće rekonstruisati grafik zavisnosti temperature od vremena, kao što se može videti na slici 1.

Najniža temperatura koju je moguće dostići, T_{min} , je dobijena usrednjavanjem zadnjih 100 tačaka, kada se temperatura stabilizuje, radi smanjenja greške. Posle nekoliko merenja moguće je dobiti zavisnost T_{min} od P .



Slika 1.
Zavisnost temperature od broja iteracija za $P = 0.8$

Figure 1.
Dependence of minimal temperature on the number of iterations for $P = 0.8$

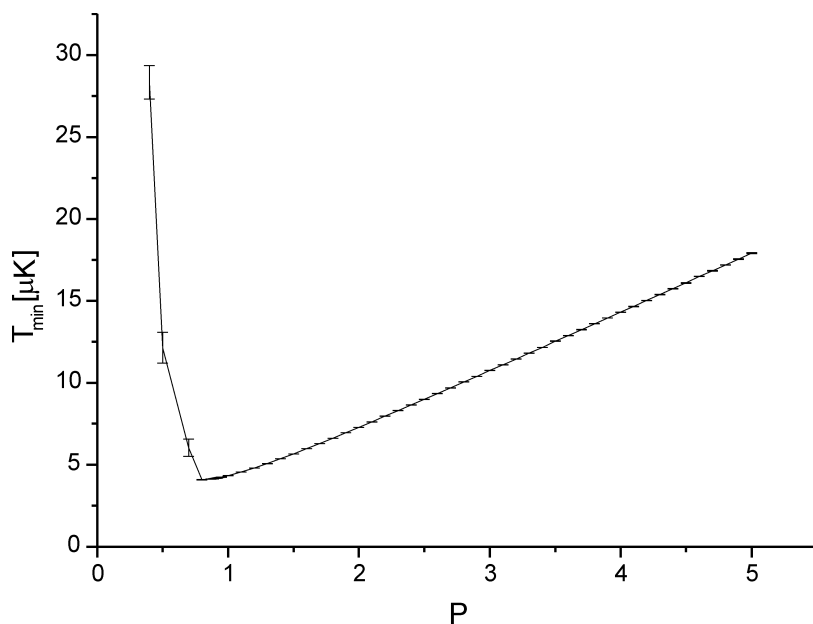
Rezultati i diskusija

Parametri za Ca^+ jon iz rada Lancastera i saradnika (Lancaster *et al.* 2003) su iskorišćeni kao ulazni podaci u našoj simulaciji. Ti ulazni podaci su: talasna dužina pika absorpcione krive 397 nm, širina absorpcione krive 305 kHz, masa jona $66.8 \cdot 10^{-23}$ kg, period polu raspada eksitovanog stanja 1.610^{-8} s i broj jona 10^4 . Parametar P je variran između 0.3 i 40.

Na slici 1 možemo videti tipičan primer pada temperature u našoj simulaciji. Zavisnost T_{\min} od P je data na slici 2. Svako T_{\min} je mereno 5 puta za jednu vrednost P .

Zapažamo, na osnovu grafika na slici 2, da je najniža temperatura koju je moguće dostići ovom metodom $4 \cdot 10^{-6}$ K. Temperaturu nije moguće više smanjiti jer Doplerov efekat postaje manji. Samim tim se i razlika verovatnoća absorpcije iz oba lasera smanjuje i lasersko hlađenje gubi na efikasnosti. Zbog toga temperatura ne opada linearno, nego eksponencijalno, što se takođe može zapaziti na grafiku 1.

Još jedan limit je činjenica da atom pri svakoj absorpciji prima energiju koja je analogna temperaturi od $3 \cdot 10^{-6}$ K. Samim tim možemo doći do zaključka da smo u ovoj simulaciji došli veoma blizu prirodnog limita. Ovaj limit je moguće prevazići birajući prelaz između dva energetska nivoa sa manjom energetsom razlikom.



Slika 2.
Zavisnost empiriski izmerene T_{min} od koeficijenta P za vrednosti blizu minimalne vrednosti T_{min}

Figure 2.
The dependence of the empirically measured T_{min} on the coefficient P for values near the minimal value of T_{min}

Interesantno je da je ta minimalna vrednost T_{min} zabeležena na intervalu P između 0.6 i 1.1, a da raste sa obe strane tog intervala.

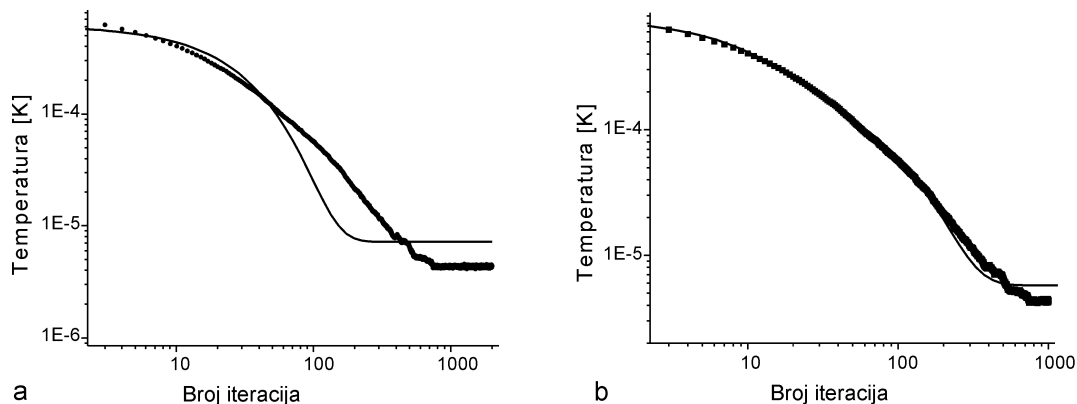
Rast minimalne temperature za P veće od 1.1 se objašnjava činjenicom da se prilikom rasta P verovatnoća absorpcije atoma koji se kreću ka laseru mnogo brže smanjuje nego kod atoma koji se kreću od lasera. Za veoma veliko P ove dve verovatnoće su veoma male i približno jednake. Sa slika 2 i 4 vidimo da je drugi od dva navedena limita dominantniji za manje vrednosti P , dok se prvi više ispoljava pri velikim vrednostima P .

Za P manje od 0.6, zbog Doplerovog efekta, verovatnoća absorpcije atoma koji se kreću prema laseru takođe opada, jer efektivna frekvencija premašuje absorpcioni deo sa velikom verovatnoću. Fotone najviše absorbuju atomi koji se kreću sporo, i dobijaju impuls u pravcu svog kretanja, tako da sistem počinje da se greje. Zbog ovoga, lasersko hlađenje drastično gubi na efikasnosti kako se P približava nuli.

Sledeća karakteristika koju smo hteli da istražimo jeste efikasnost hlađenja u zavisnosti od P . Da bismo ovo postigli probali smo da fitujemo temperaturnu krivu na opadajuću eksponencijalnu funkciju. Sva fitovanja su izvršena u Originu. Kao što, na žalost, možemo videti na grafiku 3a, eksponencijalna funkcija sa jednim članom nije odgovarajuća. Zbog toga smo iskoristili eksponencijalni fit sa dva člana:

$$y = y_0 + A_1 e^{-x/t_1} + A_2 e^{-x/t_2} \quad (8)$$

Ova funkcija se pokazuje kao veoma dobra za fit, kao što se može uočiti na grafiku 3b.

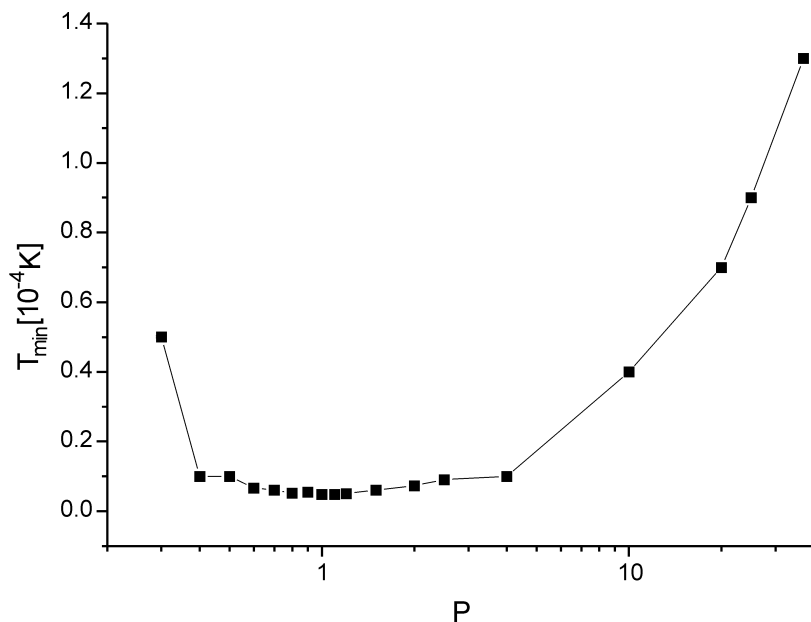


Slika 3.
Fitovanje funkcijom sa jednim (a) i sa dva eksponencijalna člana (b)

Figure 3.
Single exponential (a) and double exponential fit (b)

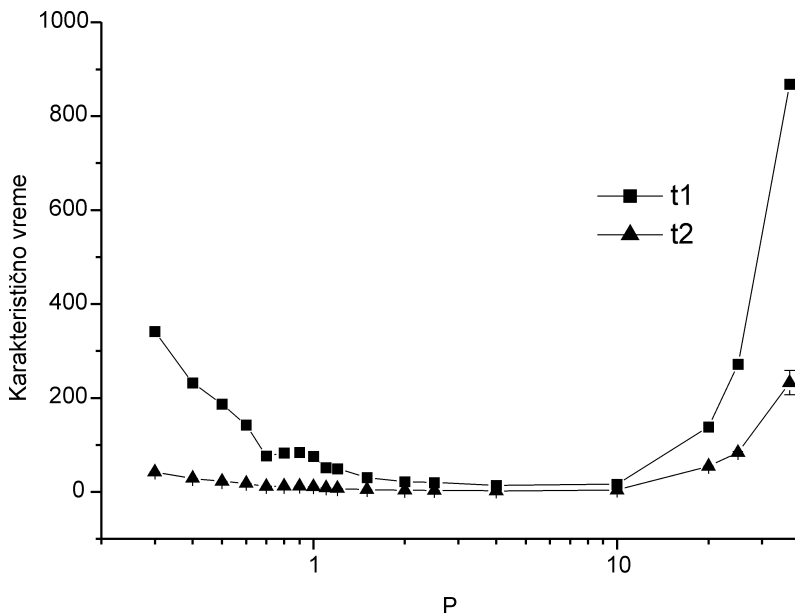
Zavisnost T_{\min} od P , gde je T_{\min} u stvari y_0 dobijeno fitovanjem, je prikazana na slici 4. Rezultati grubo potvrđuju merenja T_{\min} na grafiku 2, sa izuzetkom za vrednosti P od 0.4 do 4. To se desilo jer algoritam za fitovanje nije mogao da izračuna vrednosti preciznije od 10^{-5} . Fitovali smo razne grafike sa istom vrednošću P i zapazili da fitovane vrednosti fluktuiraju za oko 10%. I pored toga, grafik približno opisuje trend T_{\min} za različite vrednosti P .

Zavisnost t_1 i t_2 od P je prikazana na grafiku 5. Na osnovu te dve vrednosti možemo predstaviti efikasnost hlađenja. Što su veće vrednosti t_1 i t_2 na grafiku, to je manja efikasnost hlađenja. Na grafiku 6, koji predstavlja zavisnost A_1 i A_2 od P možemo zapaziti da su uticaji t_1 i t_2 približno jednaki. Kao što je slučaj sa T_{\min} , tako i kod efikasnosti hlađenja



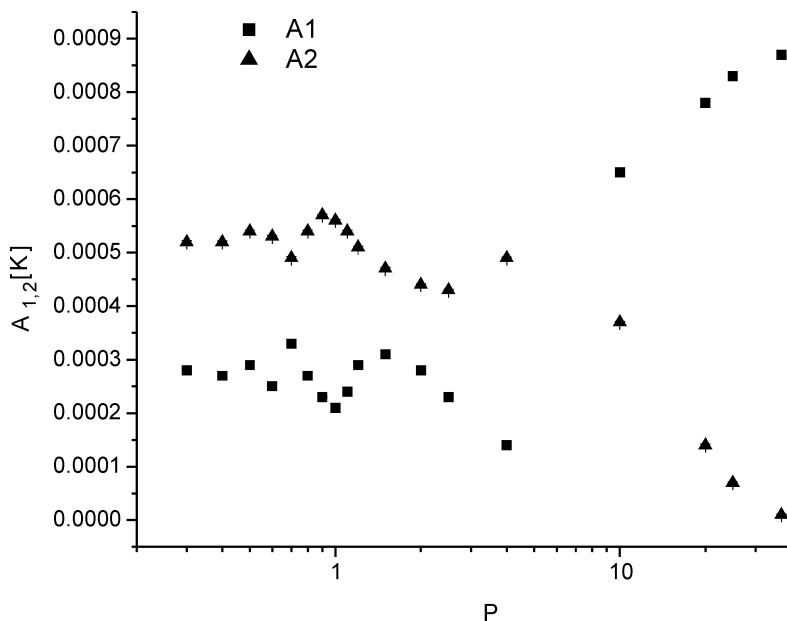
Slika 4.
Zavisnost fitovane vrednosti T_{\min} od koeficijenta P

Figure 4.
The dependence of the fitted value of T_{\min} on the coefficient P



Slika 5.
Zavisnost karakterističnih vremena hlađenja od P

Figure 5.
Characteristic cooling times for different P

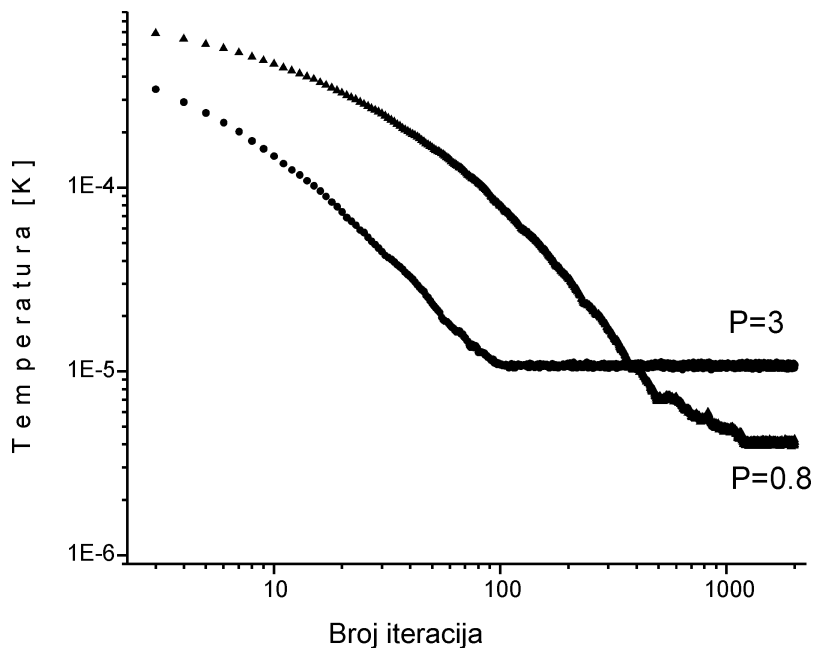


Slika 6.
Zavisnost koeficijenta A_1 i A_2 od P

Figure 6.
Dependence A_1 and A_2 of P

postoji interval gde je on najveći, a sa njegovih strana počinje da opada. Može se primetiti da maksimalna efikasnost hlađenja nije na istom intervalu P kao i T_{\min} . To znači da se za P između 0.7 i 2 efikasnost povećava, kao i T_{\min} .

Ovaj efekat je najbolje ilustrovan na grafiku 7, gde smo uporedili dva hlađenja za različite vrednosti P iz ovog intervala. Za P od 3 do 10, T_{\min} nastavlja sa rastom dok t_1 i t_2 stagniraju. Samo za veće P proces laserskog



Slika 7.
Poređenje hlađenja za
 $P = 0.8$ i $P = 3$

Figure 7.
Comparison of
temperature
dependence for
 $P = 0.8$ and $P = 3$

hlađenja opada na efikasnosti. Ovo je najbolje objašnjeno time da efekti koji utiču na T_{\min} takođe utiču na efikasnost hlađenja, osim prirodnog limita. Kako je ovaj efekat dominantan za T_{\min} u intervalu P od 0.7 do 10, zaključujemo da će T_{\min} u ovom intervalu lagano rasti, dok t_1 i t_2 opadaju ili stagniraju. Za velike vrednosti P se primećuje, kao što je i očekivano, da se svi parametri naglo povećavaju.

Zaključak

Lasersko hlađenje je verno opisano ovim radom i simulacijom. Iako je model veoma jednostavan, on opisuje sve bitne karakteristike sistema. Dobijena minimalna temperatura se slaže sa teorijskim očekivanjima.

Ovaj model ima dosta mesta za proširivanje. Prvo, moramo nastaviti da istražujemo još neke karakteristike sistema kao što su izbor atoma i distribucija energija atoma. Proširenjem modela većim brojem energetskih nivoa, on postaje realističniji i otvoren za iskorišćavanje za bilo koji atom.

Model može biti proširen na 2D i 3D u budućem radu. Takođe je moguće unaprediti implementaciju lasera tako da se frekvencija lasera menja u realnom vremenu.

Zahvalnost. Želeo bih da zahvalim svojim mentorima Nikoli Petroviću i Milovanu Šuvakovu za pruženu pomoć i vođstvo mog rada u ovom projektu. Takođe bih zahvalio Andriji Jovanoviću za pomoć u prevodu na engleski jezik. Na kraju, želeo bih da se zahvalim Istraživačkoj Stanici Petnica na pruženoj šansi za rad na ovako poučnom i edukativnom projektu.

Literatura

- Lubkin G. B. 1996. Experimenters Cool Helium Below Single-Photon Recoil Limit in Three Dimension. *Physic Today*, January: 22
- Phillips W. D., Metcalf H. J. 1987. Cooling and Trapping Atoms. *Scientific American*, Mart: 36
- Cohen-Tannoudji C. N., Phillips W. D. 1990. New Mechanisms for Laser Cooling. *Physic Today*, October: 33
- Lancaster G. P. T., Häffner H., Wilson M. A., Becher C., Eschner J., Schmidt-Kaller F., Blatt R. 2003. Doppler cooling a single Ca⁺ ion with a violet extended-cavity diode laser. *Appl. Phy. B*, **76**: 805
- Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling, W. T., Flannery B. P. 1994. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press

Miloš Srečković

Monte Carlo Simulation of Laser Cooling

Laser cooling is a method by which we can cool the gas to very low temperatures (Lubkin 1996). If we shine a laser beam on isolated atoms, because of the Doppler effect the photons are absorbed, mostly by the ions that are moving in the opposite direction. The atoms spontaneously emit a photon in a random direction and hence they effectively receive momentum opposite to the direction of their movement. If lasers are placed on all six sides, they reduce the speed of the atoms in all directions, effectively cooling them.

In this Monte Carlo simulation we studied the basic one-dimensional model of laser cooling. We simulate the motion of atoms which are trapped between two lasers along one direction. We use random numbers from the Maxwell distribution to generate atom velocities at the beginning of the simulation. For each atom we generate a random number which represents the time until the photon is absorbed and it is considered that the absorption was achieved with the laser for which the generated time is smaller. These random numbers are from the distribution given by equation (2), which represents the probability that the absorption of photons happens at time t . Afterwards, the atom spontaneously emits a photon after a time which is a random number from the distribution given by equation (6). We can thus calculate the new momentum of the atom and we repeat this procedure until the temperature of the system is stabilized.

We note, based on Figure 2, that the lowest temperature possible to achieve using this method is $4 \cdot 10^{-6}$ K. This temperature cannot be further reduced because of the Doppler limit. Another limitation is the fact that

the atom in each absorption receives the energy which corresponds to a temperature of at least $3 \cdot 10^{-6}$ K.

The next characteristic we studied was the dependence of the cooling efficiency with respect to $P = (\nu - \nu_0)/G$, where ν is the frequency of the lasers and ν_0 and G are the peak and the width of the absorption curve, respectively. We fitted the temperature dependence to equation (8) and for each P we obtained t_1 and t_2 , which indicate the efficiency of laser cooling. The dependence of t_1 and t_2 with respect to P is given in Figure 5. It is interesting to note that a very low value of P yields a faster rate of cooling, but also a higher minimal temperature in comparison with slightly higher values of P .

The phenomenon of laser cooling is described well by this paper and simulation. Although the model used here is very simple, it accurately describes all the relevant characteristics of laser cooling. The obtained minimal temperatures are in good agreement with theoretical expectations.

