

Minimizator dejstva na sferi oblika

Cilj projekta je razvijanje metoda za pronalaženje periodičnih putanja planarnog sistema kojeg čine tri tela sa ukupnim momentom impulsa nula i koja interaguju samo gravitacionom silom. Metod se sastoji od minimizacije dejstva putanje predstavljene krivolinijskim koordinatama (tzv. sfera oblika), gradient descent algoritmom, te prevođenja iskonvergirano krivolinijskog sistema koordinata u realan prostor. U cilju provjere periodičnosti putanje, korišćen je LeapFrog integrator. Polazilo se od putanja koje imaju istu topologiju kao Murova osmica (tri tela se kreću jedan za drugim po putanji „osmice“), ali se bitno razlikuju od stvarne putanje osmice. Pri određenim početnim parametrima konvergencija je bila uspešna – periodično rešenje je pronađeno u minimumu funkcije dejstva (i potvrđena njegova verodostojnost u integratoru). Ispostavilo se da se pri raznim drugim početnim parametrima za tačku neposredno pre prevojne tačke funkcije dejstva, dobija periodična putanja. Daljim iteriranjem programa, stanje sistema postaje besmisleno. Na ovaj način dobijena je Murova, a takođe i Simoova osmica (putanja slična Murovoj). Iz teorijskih predviđanja sledi da je izvod momenta inercije u tačno određenim trenucima putanje nula. Za nađena rešenja je provereno da to važi, a takođe i kada se u toku minimizacije naruši ovaj uslov, topologija putanje se narušava.

Uvod

Problem tri tela predstavlja problem određivanja trajektorija za svako od tri tela koja međusobno interaguju samo gravitaciono. Posebno mesto ovog problema čine sistemi u kojima se tela kreću samo u jednoj ravni. K. Mur je devedesetih godina pronašao rešenje nazvano Murova osmica (Moore 1993). Tri tela koja imaju istu masu se u ovom slučaju kreću jedno za drugim po putanji osmice (ili znaka „beskonačno“) (slika 1). Ovakvo „jednostavno“ rešenje problema tri tela bilo je uvod za nova istraživanja. M. Šuvakov i V. Dmitrašinović su 2013. godine pronašli trinaest novih klasa rešenja i pokušali su da ih klasifikuju koristeći tzv. sferu oblika.

Cilj ovog rada je razvijanje metoda različitog od ranijih za pronalaženje periodičnih putanja planarnog sistema kojeg čine tri identična tela sa ukupnim momentom impulsa nula i koja interaguju samo gravitacionom interakcijom. Dakle, sisteme koji će biti razmatrani čine tri tela istih masa $m_i = 1$ i ukupan moment impulsa sistema je $L = 0$. U radovima koji su do sada napisani, oblik putanje je kreiran u realnim koordinatama u dve dimenzije nakon čega je pomoću minimizacije rastojanja početne i krajnje tačke u faznom prostoru tražena periodična putanja slična početnoj. U našem radu, minimizovala se funkcija dejstva putanje direktno na prethodno pomenutoj sferi oblika, a nakon toga je ispitivana verodostojnost dobijenog rešenja u realnom prostoru.

Milan Cupać (2000), Beograd, Slobodana Jovića 39a, četvrti razred, Matematička gimnazija

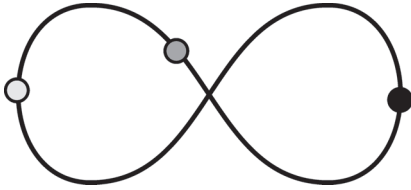
Bogdan Raonić (2000), Kragujevac, Vojvođanska 7/22, četvrti razred, Matematička gimnazija

Mentori:

Milovan Šuvakov, Institut za Fiziku, Beograd

Marija Šindik, student Fizičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Veljko Dmitrašinović, Institut za Fiziku, Beograd



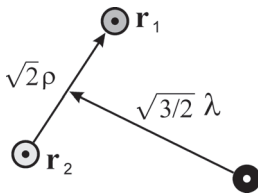
Slika 1. Murova osmica

Figure 1. Moore's figure eight

Jakobijeve koordinate

Svako telo u sistemu ima masu 1. Neka su položaji ova tri tela redom $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ i $\vec{r}_i = (x_i, y_i)$. Koordinate Dekartovog koordinatnog sistema se mogu predstaviti tzv. Jakobijevim koordinatama (slika 2). Jakobijeve koordinate su predstavljene vektorima $\vec{\rho}$ i $\vec{\lambda}$. Prvi vektor spaja položaj tela 2 sa položajem tela 1 (do na konstantu), a drugi vektor spaja položaj tela 3 sa središtem duži koja spaja tela 1 i 2 (do na konstantu). Ti vektori definisani su na sledeći način:

$$\vec{\rho} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\sqrt{2}} \quad \vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3}{\sqrt{6}}$$



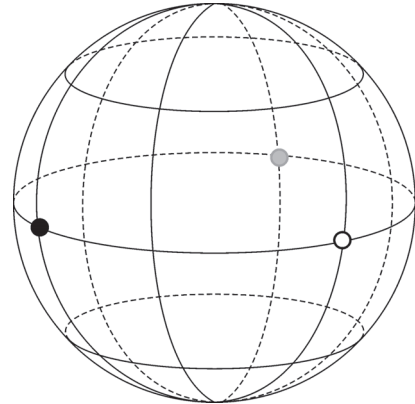
Slika 2. Jakobijeve coordinate (Prema: Šuvakov i Dmitrašinović 2014)

Figure 2. Jacobi coordinates (According to: Šuvakov & Dmitrašinović 2014)

Predstavljajući sistem od tri tela na ovaj način, gubi se informacija o ukupnom uglu rotacije sistema oko centra mase, tj. gubi se jedan stepen slobode. Pod pretpostavkom da je moment impulsa nula, pomoću $\vec{\rho}$ i $\vec{\lambda}$ se mogu jednoznačno odrediti \vec{r}_1, \vec{r}_2 i \vec{r}_3 .

Sfera oblika

Radi lakšeg predstavljanja putanje tri tela, Jakobijeve koordinate se dalje preslikavaju u tzv.



Slika 3. Sfera oblika

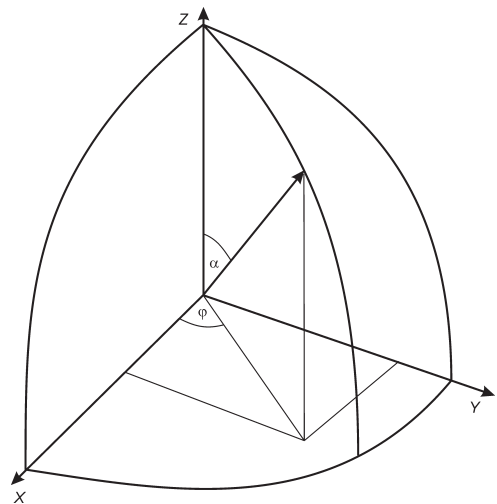
Figure 3. Shape sphere

koordinate sfere oblika (slika 3), zadate na sledeći način:

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = \left(\frac{2\vec{\rho} \cdot \vec{\lambda}}{R^2}, \frac{\lambda^2 - \rho^2}{R^2}, \frac{2(\vec{\rho} \times \vec{\lambda}) \cdot \vec{e}_z}{R^2} \right),$$

gde R predstavlja „hiper-radijus” sfere oblika koji skalira sferu na radijus 1 i pri tom:

$$R^2 = \lambda^2 + \rho^2.$$



Slika 4. Sferne koordinate na sferi oblika

Figure 4. Spherical coordinates on the shape sphere

Koordinate sfere oblika se dalje predstavljaju pomoću sfernih koordinata (slika 4) i važi:

$$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z) = (\sin \alpha \cos \varphi, \sin \alpha \sin \varphi, \cos \alpha).$$

Na sferi oblika postoje tri tačke koje predstavljaju „sudarne tačke“ tela u realnoj ravni koje grade jednakostranični trougao koji definiše ekvator sfere oblika. Sudarne tačke su tačke u kojima se koordinate tela u realnoj ravni poklapaju, tj. dolazi do sudara tela. Njihove koordinate na sferi oblika su:

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3) = \left((1, 0, 0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \right).$$

Svako stanje sistema u realnoj ravni se prikazuje u jednu tačku na sferi oblika. Kako se pri vremenski periodičnom kretanju tela vrate u početni položaj, to periodična putanja predstavlja zatvorenu krivu na sferi oblika.

Izvođenjem ukupnog momenta impulsa u zavisnosti \vec{p} i $\vec{\lambda}$ dobija se:

$$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{p}' + \vec{\lambda} \times \vec{\lambda}' = 0.$$

Takođe važi da je:

$$\begin{aligned} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3) = \\ = \left(\frac{\vec{\lambda}\sqrt{6}}{6} + \frac{\vec{p}\sqrt{2}}{2}, \frac{\vec{\lambda}\sqrt{6}}{6} - \frac{\vec{p}\sqrt{2}}{2}, -\frac{\vec{\lambda}\sqrt{6}}{3} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Lagranžijan sistema u određenom trenutku je $\mathcal{L} = T - V$, gde su V i T , potencijalna i kinetička energija. Izrazi za energije koji se izvide pomoću gore navedenih jednačina dati su sa:

$$T = \frac{1}{2} \left[\dot{R}^2 + \left(\frac{R}{2} \right)^2 (\dot{\alpha}^2 + (\dot{\varphi} \sin \alpha)^2) \right],$$

$$V = -\frac{1}{R} \sum_{i=0}^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \sin \alpha \cdot \cos \left(\varphi + \frac{2\pi i}{3} \right)}}.$$

Dejstvo periodične putanje sa periodom τ definisano je na sledeći način:

$$\int_0^\tau \mathcal{L}(t) dt = \int_0^\tau (T - V) dt.$$

Lako se izvodi da je dovoljan uslov za periodičnu putanju minimalno dejstvo, odnosno $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$.

Upravo zato što je sfera oblika iskorišćena kao klasifikacija rešenja (Šuvakov i Dmitrašinović 2013), ona je stoga vrlo pogodna jer se na sferi početna putanja upravo može zadati tako da pripada tačno određenoj željenoj klasi.

Metod

Putanja tela predstavljena je sa N tačaka na sferi oblika. Kao što je napomenuto, svaka tačka na sferi oblika predstavlja jedan položaj sistema tri tela u Dekartovoj ravni. Svaka tačka na sferi definisana je sa tri koordinate: $A_i = A_i(\alpha_i, \varphi_i, R_i)$. Dejstvo putanje definisane sa N tačaka može se predstaviti sa:

$$S = \sum_{i=1}^N (T_i - V_i) \Delta t, \quad (2)$$

gde T_i i V_i predstavljaju redom kinetičku i potencijalnu energiju i -te tačke na sferi oblika, a Δt predstavlja konstantan vremenski period koji je jednak $\Delta t = \frac{\tau}{N}$.

Dakle, između svake dve tačke putanje, pretpostavlja se da je prošao konstantan vremenski interval. Potencijalna i kinetička energije su funkcije tri pomenute promenljive i njihovih izvoda po vremenu. Izvide tih promenljivih možemo aproksimirati sa:

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\Delta t}, \quad \dot{\varphi}_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta t}, \quad \dot{R}_i = \frac{R_{i+1} - R_i}{\Delta t}.$$

Dakle, dejstvo definisano na način na koji je prikazano u jednačini (2), predstavlja funkciju $3N$ promenljivih (gde je N broj tačaka putanje). Traženje periodične putanje vrši se minimizacijom dejstva *gradient descent* algoritmom. Pri minimizaciji dejstva, menja se inicijalna putanja; početna putanja konvergira ka periodičnoj putanji, čije je dejstvo minimalno.

Gradient descent algoritam

Neka je f funkcija k promenljivih, odnosno $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Gradijent funkcije f definisian je sa:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Neka je μ definisana konstanta. Minimizacija se vrši „spuštanjem niz gradijent“. Neka je $f(a_i) = y_i$, i $f(a_0) = y_0$ početna vrednost funkcije, gde je a_i vektor koji opisuje putanju. Vršiti se sledeći niz operacija:

$$a_{i+1} = a_i - \mu \cdot \nabla f(a_i).$$

Za dovoljno malo μ je $y_0 \geq y_1 \geq y_2 \geq \dots$. Za veliki broj koraka će $y_{i+1} - y_i \approx 0$, pa je dovoljna dobra aproksimacija za lokalni minimum funkcije f zapravo $y_i = f(a_i)$.

Gradijent funkcija dejstva definisanog jednačinom (3), može se aproksimirati sa:

$$\nabla S = \begin{pmatrix} \frac{S(a_1 + \Delta a, a_2, \dots, a_{3N}) - S(a_1, a_2, \dots, a_{3N})}{\Delta a} \\ \frac{S(a_1, a_2 + \Delta a, \dots, a_{3N}) - S(a_1, a_2, \dots, a_{3N})}{\Delta a} \\ \vdots \\ \frac{S(a_1, a_2, \dots, a_{3N} + \Delta a) - S(a_1, a_2, \dots, a_{3N})}{\Delta a} \end{pmatrix},$$

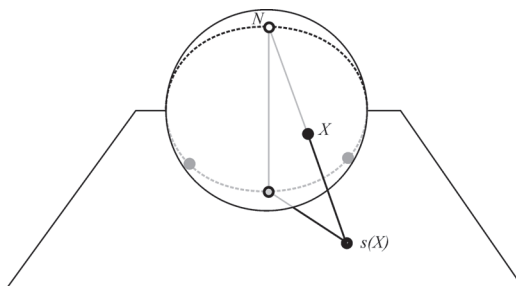
gde je:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{3N-2}, a_{3N-1}, a_{3N}) = (\alpha_1, \varphi_1, \alpha_2, \varphi_2, \dots, \alpha_N, \varphi_N, R_{3N}),$$

a Δa dovoljno mala veličina (mnogo manja od a_i).

Projekcije putanje i klasifikacija putanja

U cilju crtanja 3D putanje predstavljene na sferi oblika u ravni i vizuelnog predstavljanja, koriste se normalna i azimutalna projekcija. Svaka tačka na sferi se azimutalnom projekcijom na specifičan način slika u ravan (slika 5). Najviša tačka sfere nema svoju sliku, pa azimutalna projekcija ne predstavlja bijektivno preslikavanje. Zarotirajmo sferu oblika tako da najviša tačka u odnosu na ravan na koju se sfera slika bude jedna od sudarnih tačaka (recimo tačka $N(1,0,0)$). Dakle, jedna od tačaka sudara nema svoju sliku, dok se druge dve tačke sudara slikaju simetrično u odnosu na dodirnu tačku sfere i ravni. U ranijim istraživanjima ispostavilo se da putanja predstavlja niz rotacija oko projektovanih tačaka sudara koje imaju svoju sliku u ravni



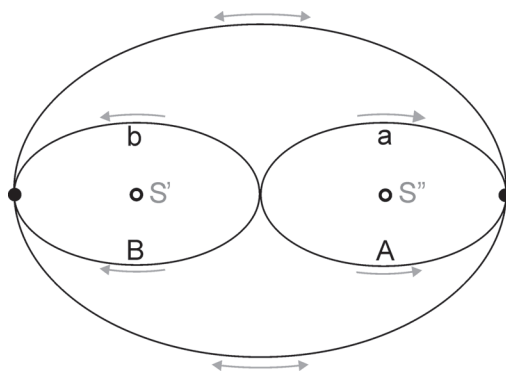
Slika 5. Azimutalna projekcija

Figure 5. Azimuthal projection

dobijenoj azimutalnom projekcijom (Šuvakov i Dmitrašinović 2013). Oko tih tačaka može se kružiti u smeru kazaljke na satu, i suprotno od smera kazaljke na satu. Tako razlikujemo „kruženje“ tipa a i A oko jedne tačke sudara, koja su kruženja oko te tačke redom u smeru kazaljke na satu i u suprotnom smeru. Slično za drugu tačku postoje kruženja b i B (slika 6). Na ovaj način se svaka putanja može klasifikovati (recimo, klasa abAB koja je klasa putanja koje kruže redom tipom a, b, A pa B).

Integrator

Periodičnost putanje dobijene minimizacijom dejstva proverava se integratorom. Integrator koji je izabran za proveru periodičnosti putanje je *LeapFrog*. Ovaj integrator generiše



Slika 6. Kruženje oko sudarnih tačaka (Prema: Šuvakov i Dmitrašinović 2014)

Figure 6. Circling around the crash points (According to: Šuvakov i Dmitrašinović 2014)

putanje tela nekog sistema čija su kretanja definisana diferencijalnim jednačinama oblika: $\ddot{\vec{r}} = F(\vec{r})$.

U slučaju posmatranog sistema, $F(\vec{r})$ predstavlja ukupnu silu koja deluje na određeno telo. Kretanje jednog od tri tela koja čine izolovani sistem u kome tela interaguju samo gravitacionom silom opisano je sledećim jednačinama:

$$\ddot{x}_1(t) = \frac{Gm_2(x_2(t) - x_1(t))}{\left[(x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{Gm_3(x_3(t) - x_1(t))}{\left[(x_3(t) - x_1(t))^2 + (y_3(t) - y_1(t))^2 \right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\ddot{y}_1(t) = \frac{Gm_2(y_2(t) - y_1(t))}{\left[(x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{Gm_3(y_3(t) - y_1(t))}{\left[(x_3(t) - x_1(t))^2 + (y_3(t) - y_1(t))^2 \right]^{\frac{3}{2}}}.$$

LeapFrog integrator izabran je zato što se, pri numeričkom generisanju putanje ukupna energija se održava, što je pogodno za sistem tri tela. Funkcionisanje integratora primenjeno na jedno od tri tela čija je početna pozicija \vec{r}_0 i početna brzina $\vec{\mathfrak{G}}_0$ dato je sledećim algoritmom:

$$\begin{aligned} \vec{\mathfrak{G}}_{i+\frac{1}{2}} &= \vec{\mathfrak{G}}_i + \vec{a}_i \frac{\Delta t}{2}, \\ \vec{r}_{i+1} &= \vec{r}_i + \vec{\mathfrak{G}}_{i+\frac{1}{2}} \Delta t, \\ \vec{\mathfrak{G}}_{i+1} &= \vec{\mathfrak{G}}_i + \vec{a}_{i+1} \frac{\Delta t}{2}, \end{aligned}$$

gde je \vec{a}_i ubrzanje posmatranog tela u i -toj iteraciji integratora, a Δt konstantan interval vremena.

Uzimajući dve uzastopne tačke sa putanje dobijene minimizacijom dejstva mogu se generisati početni uslovi za integrator. Bez umanjavanja opštosti se može pretpostaviti da je početna y -koordinata vektora $\vec{\rho}$ jednaka nuli. Iz definicija koordinata n_{x_0} i n_{y_0} izvodi se konverzija koordinata sa sfere oblika u Jakobijeve koordinate:

$$\rho_x = \frac{R}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - n_{x_0}}, \quad \rho_y = 0,$$

$$\lambda_x = \frac{R^2 n_{y_0}}{2\rho_x}, \quad \lambda_y = \sqrt{R^2 - \rho_x^2 - \rho_y^2}.$$

Napominje se da se bez pretpostavke $\rho_y = 0$, ne mogu izračunati pravci vektora $\vec{\rho}$ i $\vec{\lambda}$. Kao što je već rečeno, sfera oblika ne čuva informaciju o ukupnom zarotiranom uglu. Upravo stoga se sme pretpostaviti bilo koji ugao za početni, npr. ugao pri kome je $\vec{\rho}$ usmereno samo duž x -ose.

Pomoću jednačine (1) mogu se dobiti početni položaji tela. Uzimajući dve uzastopne tačke sa putanje između kojih je prošao interval vremena Δt , početna brzina se aproksimira sa:

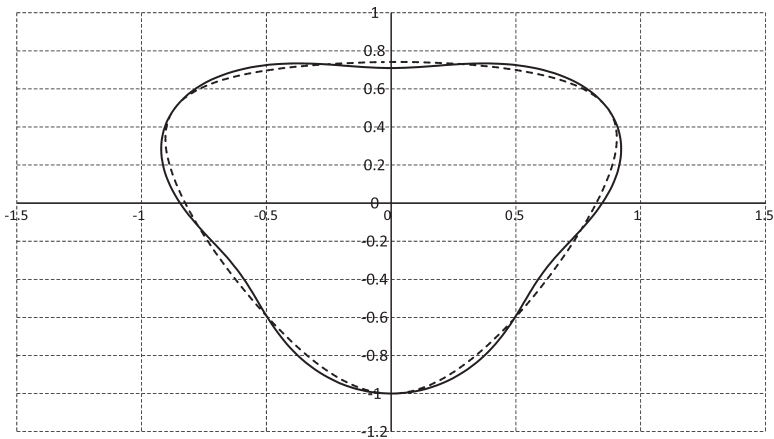
$$\vec{\mathfrak{G}}_0 = \frac{\vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i}{\Delta t}.$$

Na ovaj način se generiše celokupna putanja za svako od tri tela. Neka γ dovoljno mali koeficijent, i $r_i(t)$ položaj i -tog tela u trenutku t . Ako je $|r_i(t + \tau) - r_i(t)|$ gde je τ period periodične putanje posmatranog tela i nejednakost važi za svako od tri tela, smatra se da je putanja periodična.

Rezultati i diskusija

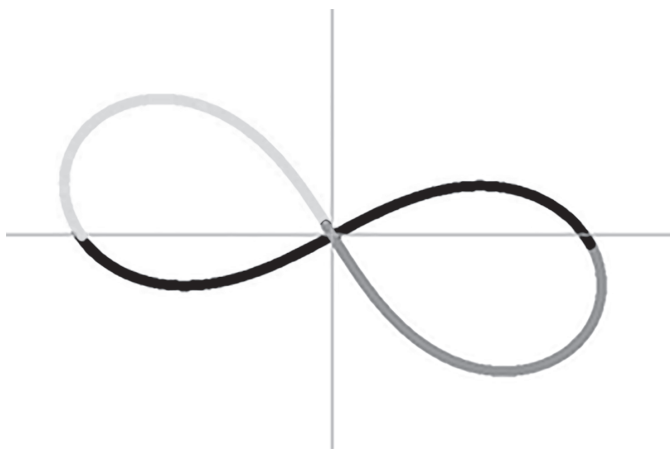
U programskom jeziku C++, napisan je kod za minimizaciju dejstva. Putanja se zadaje kao niz od N tačaka sa koordinatama α , φ i R . Topologija inicijalne putanje je ista kao i topologija željene putanje koju treba dobiti minimizacijom. Cilj je da se minimizacijom dejstva putanje odredi potencijalna periodična putanja. Pretpostavlja se da između svake dve tačke na sferi, odnosno svaka dva uzastopna, posmatrana trenutka, prošao jednaki interval vremena Δt . Period sistema je po ovome $\tau = N \cdot \Delta t$. Pošto svako telo u sistemu ima istu masu, radi lakšeg baratanja, možemo smatrati da je masa svakog tela 1. Takođe, gravitacionu konstantu G možemo poistovetiti sa 1 ($G = 1$). U ovom istraživanju, posmatrane su topologije koje pripadaju klasi rešenja abAB (klasa osmica).

Prvo je posmatrana početna putanja koja ima istu topologiju kao i Murova osmica čija je normalna projekcija označena plavom bojom na slici 7. Ovu putanju čini $N = 600$ tačaka. Interval vremena $\Delta t = 0.04$. Inicijalna vrednost hiperradijusa je za svaku tačku putanje $R = 1$. Normalna projekcija dobijene (iskonvergirane) putanje prikazana je plavom bojom na slici 7.



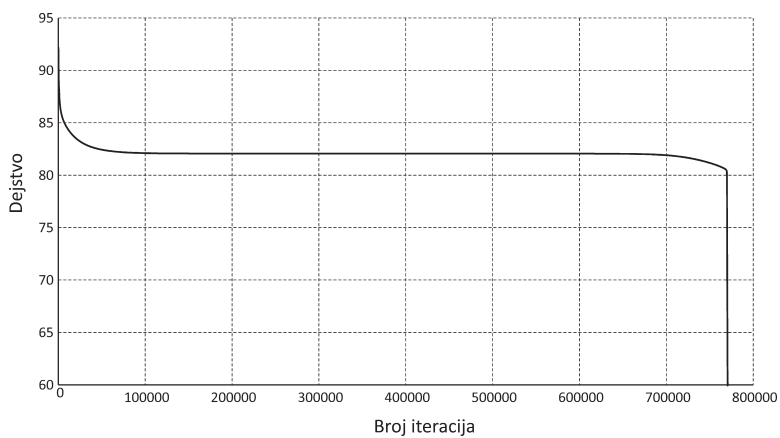
Slika 7. Normalna projekcija putanja

Figure 7. Normal projection of the path



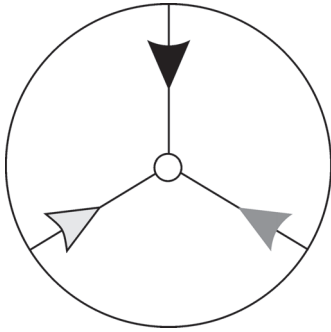
Slika 8. Murova osmica

Figure 8. Moore's figure eight



Slika 9. Zavisnost dejstva od broja iteracija

Figure 9. Dependence of the action from the number of iterations



Slika 10. Slučaj „slobodnog pada”

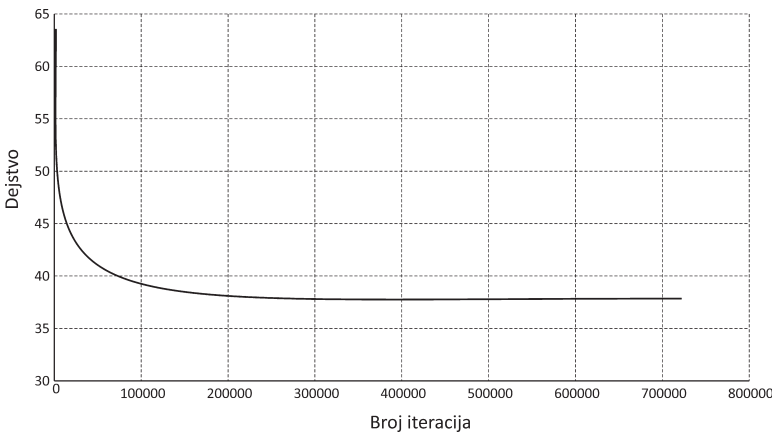
Figure 10. The case of “free fall”

Grafik koji pokazuje kako se menjalo dejstvo u zavisnosti od broja iteracija dat je na slici 9. Primećeno je da dejstvo nije iskonvergiralo, što je bio znak da metod ne daje očekivane rezultate. Ipak, primećeno je da funkcija dejstva očigledno menja konveksnost nakon oko 4.5×10^5 koraka simulacije (izvršenih iteracija programa). Putanja koja odgovara ovoj tački prevoja je detektovana i simulirana je u integratoru. Neočekivano, ispostavilo se da ta putanja odgovara Murovoj osmici. Očekivano je bilo da se ta osmica detektuje u minimumu, ali je ona ipak detektovana u prevojnoj tački. Ta putanja, prikazana je na slici 8.

Simulacija je nastavljena nakon detektovanog prevoja. Ispostavilo se da je dejstvo iskonvergiralo do neke određene vrednosti. Kada se putanja kojoj odgovara ta, novodobijena vrednost, propustila kroz integrator, dobijen je sistem u kome tri tela čine temena jednakostraničnog trougla i početne brzine su im nula. Svako telo se kreće iz početnog položaja do centra i tela se sudaraju u centru. Ovo se naziva tzv. slučaj slobodnog pada i on nema fizičkog smisla (slika 10). Na početku je zadato da je moment impulsa sistema nula. Ispostavilo se da, ako se zada moment impulsa ovakvom sistemu, dobiće se Lagranžovo rešenje problema tri tela u kojem se tela kreću po kružnici, prateći se međusobno (Šuvakov 2014).

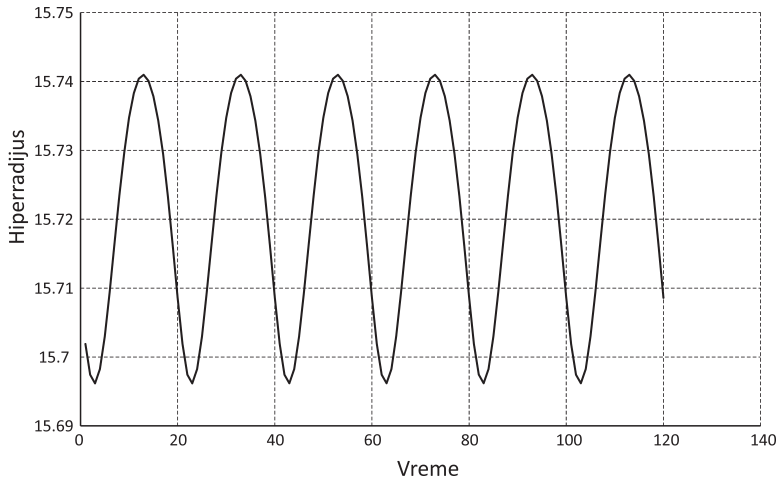
Pretpostavlja se da je minimizacijom, zbog numeričke greške, narušena simetrija sistema koja je otpočela u tački prevoja i zbog koje je sistem otišao u neočekivano stanje. Moramo napomenuti da je neposredno pre tačke prevoja, izvod funkcije dejstva bio praktično jednak nuli, odnosno, bio je reda veličine 10^{-8} .

Varirajući početne parametre, ispostavilo se da minimizacija ne teče isto za sve početne parametre. Primećeno je da se za neke parametre, putanja prvo „skuplja” ka centru, a kasnije „širi” do očekivanog oblika, a za neke se dešava nešto drugo. Ustanovljeno je da za samu minimizaciju nije bitna samo topologija početne putanje (odnosno sama početna putanja), već je bitna i početna vrednost hiperradijusa koju dodeljujemo svakoj tački putanje (početna vrednost je konstantna za sve tačke), kao i vrednost perioda $\tau = N \cdot \Delta t$. Izveden je „zakon skaliranja” po kome se vidi da



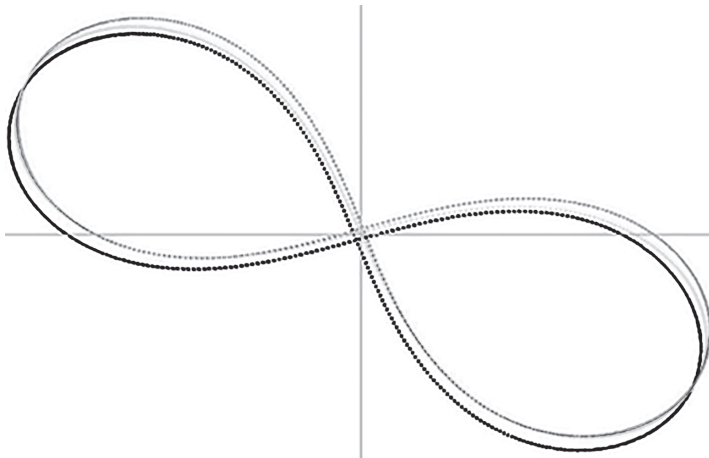
Slika 11. Zavisnost dejstva od broja iteracija

Figure 11. Dependence of the action from the number of iterations



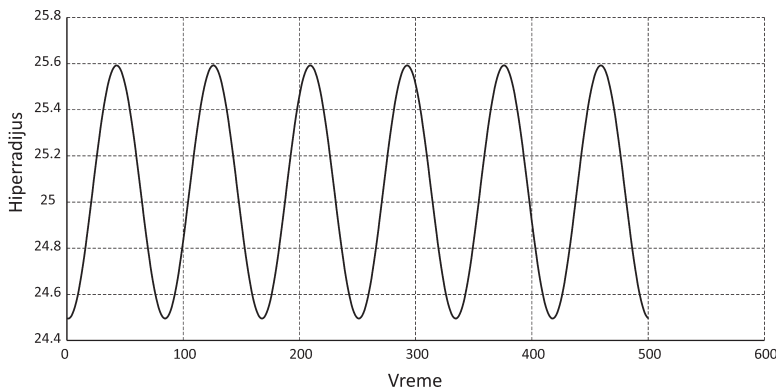
Slika 12. Grafik zavisnosti hiperradijusa od vremena pri uslovima $N = 120$, $\Delta t = 0.2$ i $R = 1$

Figure 12. Dependence of the hyperradius from time, under the conditions $N = 120$, $\Delta t = 0.2$ and $R = 1$



Slika 13. Simóova osmica

Figure 13. Simó's figure eight



Slika 14. Grafik zavisnosti hiperradijusa od vremena pri uslovima $N = 500$, $\Delta t = 1$ i $R = 25$

Figure 14. Dependence of the hyperradius from time, under the conditions $N = 500$, $\Delta t = 1$ and $R = 25$

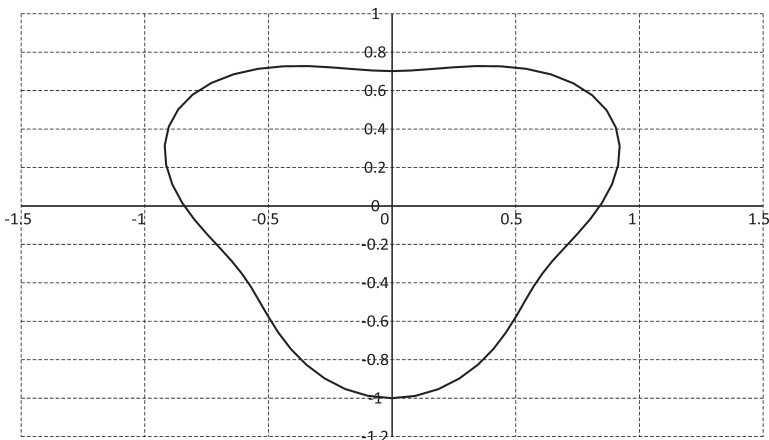
se promenom jedne veličine za neki koeficijent, menja čitav „pristup” samoj putanji. Po tom zakonu važi da ako se Δt promeni k puta, hiperradijus se menja $k^{\frac{2}{3}}$ puta, a dejstvo $k^{\frac{1}{3}}$ puta. Ovo nas vodi do zaključka da je jako bitno kako se zadaju početni uslovi i da minimizacija neće za sve početne uslove raditi podjednako efikasno.

Putanja koja je kasnije analizirana ima isti početni oblik kao i ona na slici 7, pri čemu su za nju početni parametri $N = 120$ i $\Delta t = 0.2$, a vrednost hiperradijusa je ostavljena na 1. Ponašanje dejstva pri ovoj minimizaciji je prikazano na slici 11. Funkcija dejstva nije naišla na prevojnu tačku i nakon određenog broja iteracija, izvod dejstva je imao vrednost reda veličine 10^{-14} , što nam je bio dovoljno dobar znak da je detektovan minimum, odnosno da je putanja iskonvergirala. Periodičnost dobijene putanje proverena je integratorom. Tada se došlo do neočekivanog rezultata. Naime, umesto očekivane Murove osmice,

dobijena je tzv. Simoova osmica. Simoova osmica predstavlja putanju koju čine tri osmice koje su za mali ugao pomerene jedna u odnosu na drugu (slika 13).

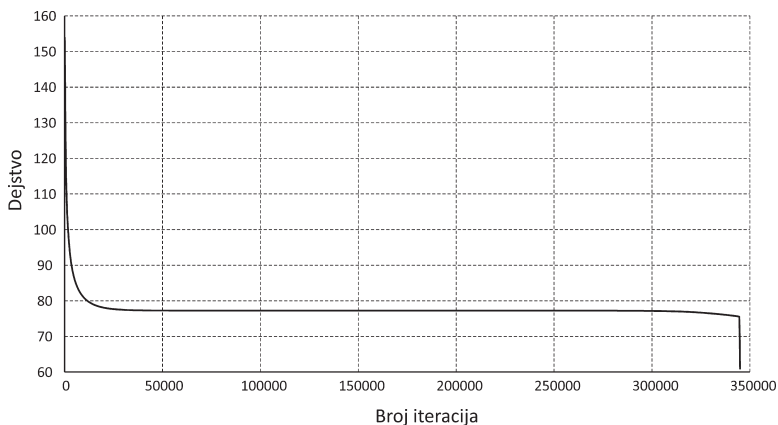
Primećeno je da je funkcija hiperradijusa ove putanje u vremenu (slika 12) sinusoidna. I za prethodno posmatranu putanju je primećena ista zavisnost za putanju koja odgovara tačkama neposredno pre prevojne tačke. Nakon prevojne tačke, topologija se narušava, a hiperradijus gubi sinusoidnu strukturu. Teorijski je predviđeno da je izvod hiperradijusa u trenucima kada periodična putanja preseca ekvator nula, što je i eksperimentalno dobijeno za dve pomenute osmice.

Razlog nepostojanja prevojne tačke leži u početnim uslovima. Naime, za ove početne uslove se ne narušava simetrija sistema, a samim tim se ne narušava ni topologija u prevojnoj tački. Ovo je zanimljiv zaključak kojim može da se objasni postojanje prevojnih tačaka funkcije dejstva.



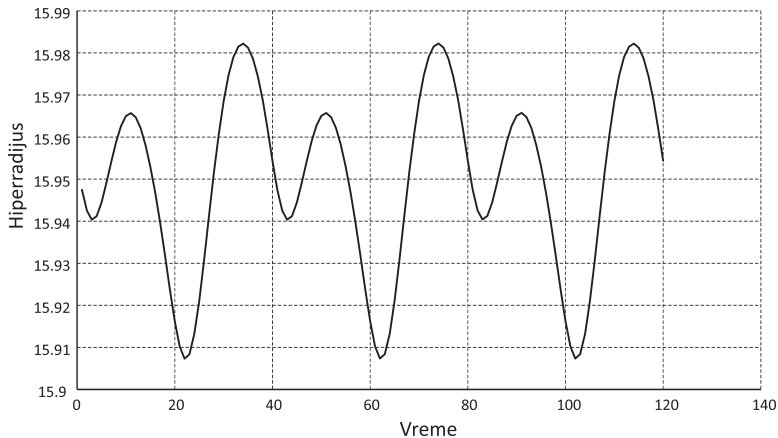
Slika 15. Početna putanja za uslove od $N = 120$ tačaka

Figure 15. Starting path of $N = 120$ points



Slika 16. Grafik zavisnosti dejstva od broja iteracija

Figure 16. Dependence of the action from the number of iterations



Slika 17. Grafik zavisnosti hiperradijusa od vremena nekoliko stotina iteracija nakon prevojne tačke funkcije dejstva od broja iteracija

Figure 17. Dependence of the hyperradius from time several hundreds of iterations after the saddle point of the function of the action from the number of iterations

Sljedeća putanja je zadata sa početnim uslovima $N = 500$ i $\Delta t = 1$, pri čemu je početna vrednost hiperradijusa $R = 25$. Kao i u prvom slučaju, funkcija dejstva sadrži prevojnu tačku u kojoj je takođe detektovana Murova osmica. Grafik vrednosti hiperadijusa svih N tačaka u prevojnoj tački dejstva je dat na slici 14. Lako se uočava da funkcija ima sinusoidnu zavisnost sa šest maksimuma iste vrednosti što odgovara broju preseka putanje osmice na sferi i ekvatora.

Isti rezultati, dobijeni su za $N = 200$ i $\Delta t = 0.1$, $N = 800$ i $\Delta t = 0.07$ kao i za mnoge druge. Periodična putanja u svakom od slučajeva je dobijena je u prevojnim tačkama.

Posmatrana je putanja $N = 120$ i $\Delta t = 2$ i $R = 12$ i čija je normalna projekcija prikazana na slici 15.

Minimizacijom je dobijena funkcija dejstva od broja iteracija (uveličana slika dejstva prikazana je na slici 16). Integratorom je dobijena putanja (slična onoj na slici 8) koja predstavlja Murovu osmicu. Posmatranjem grafika zavisnosti dejstva od broja iteracija (slika 16), uočava se da postoji razlika između ove funkcije i funkcije dobijene u prethodno posmatranim putanjama (u brojnim vrednostima i samom izgledu grafika), ali je ipak zajedničko za sve da poseduju prevojnu tačku i da se u njoj nalazi Murova osmica. Nekoliko stotina iteracija nakon detektovanja, oscilovanje hiperradijusa prikazano je na slici 17. Očigledno je narušena sinusoidna zavisnost, pri čemu je takođe narušena i topologija putanje i na kraju je takođe program iskonvergirao u pomenuti slučaj slobodnog pada (slika 10).

Zaključak

Metodom su uspešno pronađena rešenja Murove i Simoove osmice i njihova verodostojnost je potvrđena u integratoru. Način konvergencije je različit i on zavisi od početnih konstanti. Problem je nastao, pretpostavlja se, zbog numeričke greške koja narušava simetriju sistema i u velikom broju slučajeva simulacija se ne završava u minimumu, već kao što je opisano putanja se naruši i konvergira u slučaj „slobodnog pada”. U tim tačkama se narušava i očekivani grafik hiperradijusa. Ovaj problem je prevaziđen traženjem rešenja u prevojnoj tački.

Zahvalnost. Zahvaljujemo se našim mentorima Milovanu Šuvakovu i Veljku Dmitrašinoviću na odvojenom vremenu i radu sa nama na Institutu za fiziku u Beogradu i za svaku drugu pomoć. Posebno se zahvaljujemo M. Šindik koja je bila uz nas sve vreme u toku rada na projektu!

Literatura

- Moore C. 1993. Braids in classical gravity. *Physical Review Letters*, **70** (24): 3675.
- Šuvakov M., Dmitrašinović V. 2014. A guide to hunting periodic three-body orbits. *American Journal of Physics*, **82** (6): 609.
- Šuvakov M., Dmitrašinović V. 2013. Three Classes of Newtonian Three-Body Planar Periodic Orbits. *Physical Review Letters*, **110**: 114301.
- Šuvakov M. 2014. Numerical Search for Periodic Solutions in the Vicinity of the Figure-Eight Orbit: Slaloming around Singularities on the Shape Sphere. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **119**: 369.

Minimizer of an Action on the Shape Sphere

The aim of the project is the development of a method that finds periodic paths of a planar three body system. The system consists of three bodies with a total angular momentum zero, which interact only by a gravitational force. In the method the function of the action of the path represented by curvilinear coordinates (the so-called coordinates of the shape sphere) was minimized with the Gradient Descent algorithm. That output was converted then into a real space. The LeapFrog integrator was used in order to prove the periodicity of the path. The input paths were the paths, that have the same topology as the “figure eight” (three bodies move one after another on the path

of the number 8), but they are not exactly the same. With some initial parameters, the path successfully converged – a periodic solution is found in the minimum of the function of the action (and it was confirmed with the help of the integrator, that this solution make sense). With some other initial parameters, the “figure eight” can be found when a second derivate of the function of the action is zero. When the program rad after that, the system would begin to be unpredictable. Moore’s and Simó’s (a path similar to Moore’s) figure eight was successfully found with this method. Theoretical predictions say that the first derivate of the angular momentum takes a value of zero at precisely defined points. It is proven that this is true (on the solution which was found). Furthermore, when that condition becomes invalid, the path gets into an unpredictable state. 