Aleksandar Bukva

Metod pronalaženja Hamiltonijana za datu svojstvenu funkciju primenjen na Loflinovu talasnu funkciju

Cilj rada je pronaći Hamiltonijan za već poznatu talasnu funkciju. Kao primer uzeta je Loflinova talasna funkcija koja opisuje sistem kvantnih elektrona u magnetnom polju. Kada se elektron u magnetnom polju ohladi do temperatura na kojima počinje da ispoljava kvantne osobine dolazi do kolektivne pojave, kvantnog Holovog efekta. Nije poznata tačna talasna funckija ovakvog sistema, već se koristi Loflinova koja za sada daje veoma dobra predviđanja u skladu sa eksperimentima. U drugom delu, umesto Loflinove korišćena je Džojnt-Muselinova talasna funkcija jer ona nema sve simetrije koje ima Loflinova, pa je očekivan drugačiji rezultat.

Holov efekat

Struju elektrona u dvodimenzionalnom provodniku pod uticajem magnetnog polja usmerenog normalno na ravan provodnika prvi je proučavao Edvin Hol (Edwin Herbert Hall, 1855-1933). Pločasti provodnik koji je priključen na razliku potencijala nalazi se u magnentom polju čija ravan je normalna na ravan provodnika. Zbog prisustva magnetnog polja na elektrone deluje Lorencova sila i oni počinju da se kreću kružnim putanjama, usled čega dolazi do nagomilavanja elektrona na jednoj strani provodnika. Zbog nagomilavanja elektrona na jednoj strani provodnika, na suprotnoj strani se nagomilavaju naelektrisanja suprotnog znaka i stvara se razlika potencijala. Ova pojava je nazvana Holov efekat, a razlika potencijala Holov napon. Karakteristična veličina koja je vezana za Holov efekat je Holov otpor, definisan kao:

$$R_{\mathrm{H}} = \frac{U_{\mathrm{H}}}{I} = \frac{B}{n \cdot e} \tag{1}$$

gde je B magnetna indukcija, n broj elektrona, a e naelektrisanje elektrona.

Aleksandar Bukva (1994), Kikinda, Dušana Vasiljeva 12c, učenik 3. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu

MENTOR: Đorđe Radičević, Univerzitet Stanford, SAD

Kvantna mehanika

Kvantna mehanika je oblast fizike koja opisuje kretanje mikroskopskih čestica i osnovna jednačina kojom se opisuju kretanja je Šredingerova jednačina:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

Ova jednačina predstavlja vremenski nezavisnu Šredingerovu jednačinu, gde je potencijal konstantan u vremenu, a slučaj kada je potencijal vremenski promenljiv ovde nećemo razmatrati. Kvadrat talasne funkcije ψ predstavlja verovatnoću nalaženja čestice na određenoj koordinati, Hamiltonijan $\hat{H}$ je operator ukupne energije sistema i sastoji se od kinetičkog operatora i operatora potencijalne energije, $\hat{H} = \hat{K} + \hat{T}$. Kinetički operator je oblika $\hat{K} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$, dok potencijal zavisi od sistema koji ispitujemo. U izrazu za $\hat{K}$ pojavljuje se ∇, vektor koji predstavlja zbir parcijalnih izvoda po svim koordinatama:

$$\nabla\psi = \hat{x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Opšti oblik vremenski nezavisne Šredingerove jednačine je:

$$\left(\frac{-i\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(x)\right)\psi = E\psi \tag{2}$$

Jednačina (2) predstavlja svojstveni problem, gde je E svojstvena vrednost ψ funkcije na koju deluje operator $\hat{H}$. Kako je E energija stanja koje je opisano funkcijom ψ, odatle se vidi da svako stanje koje čestica može da zauzme ima određenu energiju i da nije moguće da ima bilo koju drugu energiju. Talasna funkcija predstavlja jedno stanje čestice. Ova razlika – da čestica može imati samo određene energije koje zavise od stanja u kojem se nalazi, suštinska je razlika između klasične i kvantne fizike.

Kada se čestica nađe u magnetnom polju, potencijalna energija je jednaka nuli i uticaj magnetnog polja se dodaje u kinetički operator koji ima oblik:

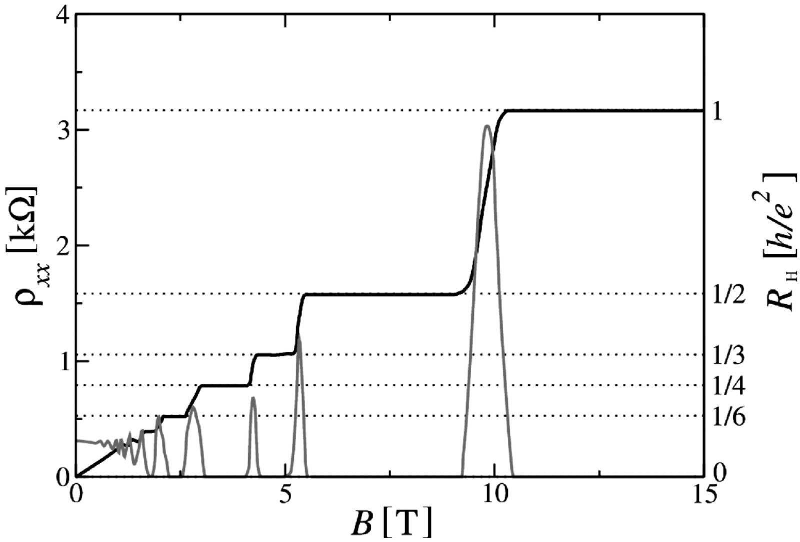
$$\hat{T} = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - qA)^2$$

gde je A dvodimenzionalni vektorski potencijal oblika:

$$A = \frac{B}{2}(x, -y)$$

Kvantni Holov efekat

Kada se provodnik u magnetnom polju ohladi do temperatura kada elektroni počinju da ispoljavaju kvantne osobine, dolazi do pojave kvantnog Holovog efekta. Otpor iz jednačine (1) linearno zavisi od magnetne indukcije, te bi i otpornost uzorka trebalo linearno da zavisi i grafik bi trebalo da bude linearan. Međutim, zbog kvantne prirode elektrona koji se nalaze u uzorku ta zavisnost je nešto drugačija.



Slika 1.
Tipična zavisnost Holovog otpora R_H (crna linija) i longitudinalnog specifičnog otpora ρ_{xx} (siva linija) od magnetne indukcije u kvantnom Holovom efektu (preuzeto sa: oer.physics.manchester.ac.uk)

Figure 1.
Typical magnetic field dependence of Hall resistance R_H (black) and longitudinal resistivity ρ_{xx} (gray)

Platoi dobijeni eksperimentalnim putem se objašnjavaju time što se u uzorku koji se ispituje nalaze određene nečistoće u vidu većih atoma koje daju dodatni potencijal elektronima. Što su atomi nečistoća veći, to je uticaj na elektrone veći. Kada se dodatni potencijal koji dolazi od nečistoća uvrsti u Šredingerovu jednačinu, kao rešenja dobijaju se dva moguća stanja koja elektron može da zauzme. Elektroni u jednom stanju imaju energiju istu kao i elektroni u linearnom harmonijskom oscilatoru (LHO), pomerenu za određeni faktor. Ti elektroni su vezani za nečistoće u uzorku i ne mogu da učestvuju u protoku struje. U drugom slučaju elektroni imaju identičnu energiju kao i elektroni u potencijalu LHO i oni nisu vezani za nečistoće, te mogu da učestvuju u protoku struje. S obzirom da se energetski nivoi popunjavaju redom, prvo elektroni sa manjom energijom kako bi se princip minimalne energije ispoštovao, kada dođe red da se popune nivoi elektronima koji nisu u stanju da prenose struju nastaju platoi koji se dobijaju iz eksperimenata. Električna otpornost ovakvog uzorka je:

$$\rho = n\frac{e^2}{h}$$

gde je n ceo ili racionalni broj za svaki plato.

Frakcioni kvantni Holov efekat

U odeljku Kvantni Holov efekat objašnjen je efekat pri celobrojnoj vrednosti broja n, umnoška e^2/h. Kada je n racionalan broj to objašnjenje ne važi, jer u tom slučaju postoji i međusobna interakcija između elektrona. Predlog oblika talasne funckije koja bi mogla da odgovara za sistem elektrona u magnentom polju pri racionalnom broju n predložio je Robert Loflin, zbog čega je 1998. godine dobio i Nobelovu nagradu za fiziku. Funkcija koju je Loflin predložio ima oblik:

$$\psi(z_N)_{n,D} = D\left(\prod_{N\geq i>j\geq 1}(z_i - z_j)^n\right)\prod_{k=1}^{N} e^{-|z_k|^2}$$

gde su D i n kontsante, z kompleksan broj oblika $z = \frac{1}{2l_B}(x+iy)$, x i y koordinate. Kako Loflinova funkcija sadrži informaciju o „efektivnom" potencijalu u kome se kreću čestice, u ovom radu tražimo upravo taj potencijal, tj. Hamiltonijan.

Energija osnovnog stanja elektrona u magnetnom polju

Loflinova talasna funkcija

Loflinova talasna funkcija, kada se kao aproksimacija prvog reda zanemari međusobna kulonovska interakcija, predstavlja talasnu funkciju dvodimenzionalnog sistema elektrona u osnovnom stanju u magnetnom polju. Ako napišemo Šredingerovu jednačnu u obliku:

$$(\hat{K} + \hat{T})\psi = E\psi$$

potencijal možemo izraziti u obliku:

$$\hat{T}_1 = -\frac{\hat{K}\psi}{\psi}$$

gde je $\hat{T}_1 = \hat{T} - E$. Potencijal u magnetnom polju je nula te će energija onda biti:

$$-E = -\frac{\hat{K}\psi}{\psi}$$

Kada operator $\hat{K}$ deluje na ψ, izraz možemo da napišemo u drugačijem obliku kako bi nam bilo lakše za računanje:

$$\hat{K}\psi = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - qA)(-i\hbar\nabla\psi - qA\psi)$$

Ako prethodni izraz raspišemo, dobijamo:

$$\frac{1}{2m}(-\hbar^2\nabla^2\psi + qi\hbar\nabla(A\psi) + iqA\hbar(\nabla\psi) + q^2A^2\psi)$$

Deo izraza, $\nabla(A\psi)$ možemo napisati:

$$\nabla(A\psi) = A(\nabla\psi) + \psi(\nabla A)$$

Kada uvrstimo ovo u izraz dobijamo:

$$\frac{1}{2m}(-\hbar^2\nabla^2\psi + 2qi\hbar A(\nabla\psi) + qi\hbar\psi(\nabla A) + q^2A^2\psi)$$

Operator ∇ možemo napisati kao $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$. ∇A je skalarni proizvod dva vektora:

$$\nabla A = \frac{B}{2}\left(-\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0$$

Izraz $A(\nabla\psi)$ možemo napisati u obliku:

$$A(\nabla\psi) = \frac{B}{2}\left(x\frac{\partial\psi}{\partial y} - y\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

Pošto Loflinova funkcija kao argumente uzima N čestica, prvo moramo tražiti izvod po jednoj čestici, pa onda sumirati izvode po svim česticama. Argumenti Loflinove funckije su kompleksni brojevi koji su oblika $x + iy$, tako da izvode moramo tražiti i po x i po y osi. Izvod po x:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_m} = e^k \prod_{i>j}(z_i - z_j)^n \left(\sum_{i=2}^{N}\sum_{i>j} \frac{\frac{\partial}{\partial x_m}(z_i - z_j)^n}{(z_i - z_j)^n} + \frac{\frac{\partial e^k}{\partial x^m}}{e^k} \right)$$

gde je x_m x koordinata čestice m. Ovaj izraz je moguće srediti i tada dobijamo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_m} = \psi\left(\frac{1}{2l_B} \sum_{i=2}^{N} \sum_{i>j} \frac{n}{z_i - z_j} (\delta_{i,m} - \delta_{j,m}) - \frac{1}{2l_B^2} \sum_k x_k \delta_{k,m} \right)$$

Funkcije koje se ovde pojavljuju – $\delta_{i,m}$ i $\delta_{j,m}$, su Kronekerove delta funkcije koje su definisane:

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, \text{ za } x = y \\ 0, \text{ za } x \neq y \end{cases}$$

Sada ćemo Kronekerovim deltama pomnožiti sume u zagradi da bismo se oslobodili svih članova koji su jednaki nuli. Nakon množenja dobijamo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_m} = \psi\left(\frac{1}{2l_B} \sum_{j=2}^{m-1} \frac{n}{z_m - z_j} + \frac{1}{2l_B} \sum_{i>m}^{N} \frac{n}{z_m - z_i} - \frac{x_m}{2l_B^2} \right)$$

Kako su m i j nezavisni u ovim sumama možemo zapisati:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_m} = \psi\left(\frac{1}{2l_B} \sum_{j=2}^{m-1} \frac{n}{z_m - z_j} + \frac{1}{2l_B} \sum_{j>m}^{N} \frac{n}{z_m - z_j} - \frac{x_m}{2l_B^2} \right)$$

ili skraćeno:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_m} = \psi\left(\frac{1}{2l_B} \sum_{j\neq m}^{N} \frac{n}{z_m - z_j} - \frac{x_m}{2l_B^2} \right)$$

Izvod po y koordinati bi bio:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_m} = \psi\left(\frac{1}{2l_B} \sum_{j\neq m}^{N} \frac{in}{z_m - z_j} - \frac{y_m}{2l_B^2} \right)$$

Drugi parcijalni izvod po x koordinati je:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_m^2} = \psi\left(\frac{1}{2l_B} \sum_{j\neq m}^{N} \frac{n}{z_m - z_j} - \frac{x_m}{2l_B^2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2l_B} \sum_{j\neq m}^{N} \frac{n}{(z_m - z_j)^2} - \frac{x_m}{2l_B^2} \right)$$

Drugi parcijalni izvod po y koordinati je:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_m^2} = \psi\left(\frac{1}{2l_B} \sum_{j\neq m}^{N} \frac{in}{z_m - z_j} - \frac{y_m}{2l_B^2} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2l_B} \sum_{j\neq m}^{N} \frac{n}{(z_m - z_j)^2} - \frac{x_m}{2l_B^2} \right)$$

Sada imamo sve potrebne izvode koje treba vratiti u izraz $-\frac{\hat{K}\psi}{\psi}$ za energiju:

$$-\hat{K}\psi = \frac{1}{2m}(\hbar^2\nabla^2\psi - i\hbar q(\nabla A)\psi - 2i\hbar qA(\nabla\psi) - q^2A^2\psi)$$

Prvi deo ovog izraza je $\hbar^2\nabla^2\psi$, koji kada se uvrste izrazi za zbir drugih parcijalnih izvoda po x i y, nakon sređivanja, postaje:

$$\hbar^2\nabla^2\psi = \hbar^2\psi\left(-\frac{1}{2l_B^3}z_m\left(\sum_{j\neq m}^{N}\frac{n}{z_m - z_j}\right) + \frac{1}{4l_B^2}(x_m^2 + y_m^2) - \frac{1}{l_B^2}\right)$$

Drugi član izraza bi bio:

$$2i\hbar qA(\nabla\psi) = \frac{\hbar qB}{2l_B}\psi\left(z_m\left(\sum_{j\neq m}^{N}\frac{n}{z_m - z_j}\right)\right)$$

a treći:

$$-q^2A^2\psi = -q^2\frac{B}{2}\psi(x_m^2 + y_m^2)$$

Zamenom ovih izraza u $\frac{-\hat{K}\psi}{\psi}$ nakon sređivanja dobijamo:

$$-\frac{\hat{K}\psi}{\psi} = \left(z_m\left(\sum_{j\neq m}^{N}\frac{n}{z_m - z_j}\right)\left(-\frac{\hbar^2}{2l_B^3} + \frac{\hbar qB}{2l_B}\right) + (x_m^2 + y_m^3)\left(\frac{\hbar^2}{4l_B^4} - \frac{q^2B^2}{4}\right) - \frac{\hbar^2}{l_B^2}\right)$$

Kada stavimo da je $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{qB}}$, zagrada će se anulirati i jedino što će ostati je:

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{qB\hbar}{m}$$

a kada uvedemo da je $\frac{qB}{m} = \omega$ (kružna frekvencija), dobijamo:

$$-\frac{1}{2}\hbar\omega.$$

Na početku izvođenja smo tražili $V_1 = V - E$ i znamo da je V u magnetnom polju nula. Izraz koji smo dobili predstavlja $-E$, što je energija elektrona u osnovnom stanju. Dakle,

$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Džojnt-Muselinova funkcija

U određenim stanjima sistema, kada je izložen veoma jakom magnetnom polju usmerenom normalno na ravan sistema, pojavljuje se narušenje rotacione simetrije, dok translatorna simetrija ostaje očuvana. Ovakva stanja su opisana Džojnt-Muselinovom funkcijom koja ima oblik:

$$\psi = \prod_{i<j}^{N} (z_i - z_j)(z_i - z_j - \alpha l)(z_i - z_j + \alpha l) e^{-\sum \frac{|z_k|^2}{4l^2}}$$

gde su z_i i z_j koordinate čestice, α i l konstante.

Džojnt-Muselinova funkcija je opšti oblik Loflinove talasne funkcije kada se za vrednost konstante α uzme nula. Uzmimo da je $k = \alpha l$ i uradimo malu transformaciju funkcije:

$$\psi = \prod_{i<j}^{N} (z_i - z_j)((z_i - z_j)^2 - k^2) e^{-\sum \frac{|z_k|^2}{4l^2}}$$

Izvod po x koordinati je:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_m} = \psi \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{i<j} \frac{\frac{\partial}{\partial x_m}(z_i - z_j)((z_i - z_j)^2 - k^2)}{(z_i - z_j)((z_i - z_j)^2 - k^2)} + \frac{\frac{\partial}{\partial x_m} e^{-\sum \frac{|z_k|^2}{4l^2}}}{e^{-\sum \frac{|z_k|^2}{4l^2}}} \right) \quad (3)$$

Sada nam je potreban izvod od $(z_i - z_j)((z_i - z_j)^2 - k^2)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_m}(z_i - z_j)((z_i - z_j)^2 - k^2) =$$

$$= 3(\delta_{i,m} - \delta_{j,m})(z_i - z_j)^2 - k^2(\delta_{i,m} - \delta_{j,m})$$

Uvrstimo ovaj izvod u jednačinu (3):

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_m} = \psi \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{i<j} \frac{(\delta_{i,m} - \delta_{j,m})(3(z_i - z_j)^2 - k^2)}{(z_i - z_j)((z_i - z_j)^2 - k^2)} + \frac{\frac{\partial}{\partial x_m} e^{-\sum \frac{|z_k|^2}{4l^2}}}{e^{-\sum \frac{|z_k|^2}{4l^2}}} \right)$$

Suma u ovom izrazu može se dovesti na oblik:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{i<j} \frac{(\delta_{i,m} - \delta_{j,m})(3(z_i - z_j)^2 - k^2)}{(z_i - z_j)((z_i - z_j)^2 - k^2)} =$$

$$= \sum_{j \neq m}^{m-1} \frac{1}{z_m - z_j} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{z_m - z_j - k} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{z_m - z_j + k}$$

Kada sumu u ovom obliku uvrstimo u jednačinu (3) dobijamo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_m} = \psi \left(\sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{z_m - z_j} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{z_m - z_j - k} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{z_m - z_j + k} - \frac{x_m}{2l^2} \right)$$

što je izvod po x koordinati. Izvod po y koordinati je:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_m} = \psi \left(\sum_{j \neq m}^{N} \frac{i}{z_m - z_j} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{i}{z_m - z_j - k} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{i}{z_m - z_j + k} - \frac{y_m}{2l^2} \right)$$

Drugi parcijalni izvod po x koordinati je:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_m^2} = \psi \left(\sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{z_m - z_j} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{z_m - z_j - k} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{z_m - z_j + k} - \frac{x_m}{2l^2} \right)^2 +$$

$$+ \psi \left(\sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{(z_m - z_j)^2} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{(z_m - z_j - k)^2} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{(z_m - z_j + k)^2} - \frac{1}{2l^2} \right)$$

Drugi parcijalni izvod po y koordianti je:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_m^2} = \psi \left(\sum_{j \neq m}^{N} \frac{i}{z_m - z_j} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{i}{z_m - z_j - k} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{i}{z_m - z_j + k} - \frac{y_m}{2l^2} \right)^2 +$$

$$+ \psi \left(\sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{(z_m - z_j)^2} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{(z_m - z_j - k)^2} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{(z_m - z_j + k)^2} - \frac{1}{2l^2} \right)$$

Radi jednostavnosti, u daljem tekstu sa S_1 označićemo:

$$S_1 = \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{z_m - z_j} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{z_m - z_j - k} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{1}{z_m - z_j + k}$$

a sa S_2:

$$S_2 = \sum_{j \neq m}^{N} \frac{i}{z_m - z_j} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{i}{z_m - z_j - k} + \sum_{j \neq m}^{N} \frac{i}{z_m - z_j + k}$$

Sada imamo sve članove i treba da izračunamo $\frac{-\hat{K}\psi}{\psi}$. Prvi član je $\hbar^2 \nabla^2 \psi$, što je:

$$\hbar^2 \psi \left(\left(S_1 - \frac{x_m}{2l^2} \right)^2 + \left(-S_2 - \frac{1}{2l^2} \right) + \left(iS_1 - \frac{y_m}{2l^2} \right)^2 + \left(S_2 - \frac{1}{2l^2} \right) \right) =$$

$$= \hbar^2 \psi \left(-\frac{S_1 z_m}{l^2} - \frac{1}{l^2} + \frac{1}{4l^2}(x_m^2 + y_m^2) \right)$$

Drugi član je:

$$-2i\hbar q A(\nabla \psi) = \hbar q S_1 z_m \psi$$

Treći član izraza je:

$$-q^2 A^2 \psi = -q^2 \frac{B^2}{4} \psi (x_m^2 + y_m^2)$$

Uvrštavanjem ovih članova dobijamo izraz za energiju:

$$-\frac{\hat{K}\psi}{\psi} = \frac{1}{2m} \left(S_1 z_m \left(\hbar q B - \frac{\hbar^2}{l^2} \right) + (x_m^2 + y_m^2) \left(\frac{\hbar^2}{4l^2} - \frac{q^2 B^2}{4} \right) - \frac{\hbar^2}{l^2} \right)$$

Ako stavimo da je $l = \sqrt{\frac{\hbar}{qB}}$ i da je $\omega = \frac{qB}{m}$ dobijamo:

$$-\frac{\hat{K}\psi}{\psi} = -\frac{1}{2}\omega\hbar$$

Iz prethodnih delova znamo da je potencijal u magnetnom polju jednak nuli, te da dobijeni izraz predstavlja energiju čestice:

$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Zaključak

Metod pronalaženja nepoznatog svojstvenog Hamiltonijana za poznatu talasnu funckiju pokazao se kao pouzdan alat za ispitivanje talasnih funkcija, što je i pokazano na dva sistema. Na primeru Loflinove funkcije dobijena je energija osnovnog stanja koja se podudara sa eksperimentalnim rezultatima. U slučaju Džojnt-Muselinove funkcije bilo je očekivano da, zbog narušenja rotacione simetrije, Hamiltonijan bude manje simetričan nego kod Loflinove funckije, što se pokazalo netačnim. U daljem radu moglo bi se ispitati šta dovodi do toga da Hamiltonijan Džojnt-Muselinove funkcije poseduje isti stepen simetričnosti kao i Loflinov.

Zahvalnost. Zahvaljujem se mom mentoru Đorđu Radičeviću na sugestijama i idejama bez kojih ovaj rad ne bi uspeo. Takođe se zahvaljujem na pomoći saradnicima seminara fizike Jeleni Pajović, Vladanu Pavloviću i rukovodiocu seminara Branimiru Ackoviću.

Literatura

Griffiths D. J. 1995. *Introduction to quantum mechanics*. New Jersey: Prentice Hall

Musaelian K., Joynt R. 1996. Broken rotation symmetry in the fractional quantum Hall system. *Journal of Physics: Condensed Matter*, **8**: L105.

Laughlin R. B. 1983. Quantized motion of three two-dimensional electrons in a strong magnetic field. *Physical Review Letters*, **50**: 1395.

Aleksandar Bukva

Method for Finding an Hamiltonian for a Known Wave Function Applied to a Laughlin Function

The goal of this paper is to find a Hamiltonian for a known wave function. As an example, we use the Laughlin wave function that describes quantum electrons in a magnetic field. When electrons are cooled down to a very low temperature, they start to exhibit quantum properties and we can study a collective phenomenon, the quantum Hall effect. The exact wave function for this system is not known, but the Laughlin wave function has had very good predictions with the experiments so far. In the second part of the paper, we use the Musaelian & Joynt (1996) wave function because it has broken rotational symmetry and a different Hamiltonian is expected.