

Eksperimentalno utvrđivanje haosa u kretanju fizičkog klatna sa oscilujućom tačkom vešanja

U radu je prikazano kako je moguće eksperimentalno ustanoviti haos u jednostavnom fizičkom sistemu klatna sa oscilujućom tačkom vešanja. Izložen je detaljan opis aparature koja je korišćena. Merenja su vršena tako što je amplituda oscilovanja varirana za različite parametre koji su prethodno određeni simulacijom. Klatno je snimano za različite setove parametara, a zatim su snimci kompjuterski obrađeni. Podaci su tumačeni na osnovu faznih dijagrama pomoću kojih je potvrđena pretpostavka o javljanju haosa u ovom sistemu.

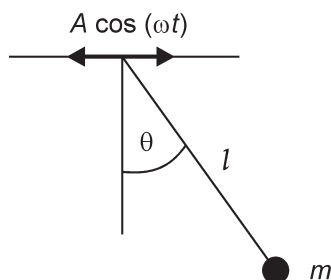
Uvod

Teorija haosa proučava nelinearne dinamičke sisteme. Osnovna osobina ovih sistema je velika osetljivost na početne uslove, usled koje nelinearni sistemi mogu ispoljiti osobine determinističkog haosa. To podrazumeva da se, iako su poznati zakoni po kojima se sistem menja tokom vremena, kao i početni uslovi, ponašanje sistema ne može predvideti jer je početne uslove nemoguće odrediti dovoljno precizno. S obzirom da je sistem nelinearan, mala greška u početnim uslovima raste eksponencijalno tokom vremena. Upravo zbog toga, iako je dinamika determinističkih sistema u potpunosti određena, nije moguće predvideti stanje sistema tokom vremena. Deterministički haos opisuje kompleksne sisteme poput meteoroloških i ekonomskih, ali i jednostavnije dinamičke sisteme.

Jedan od najjednostavnijih primera za izučavanje determinističkog haosa je klatno čija tačka vešanja osciluje periodično. Ovaj sistem sačinjen je od kuglice koja je okačena o neistegljivu nit zanemarljive mase, pri čemu tačka vešanja osciluje po horizontalnoj ravni (slika 1). Sistem je opisan jednačinom (Salom 1999):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta - \frac{A\omega^2}{l} \sin \omega t \cos \theta = 0$$

gde je θ ugao otklona niti u trenutku t , γ koeficijent prigušenja, l dužina niti, A amplituda oscilovanja tačke oslonca i ω frekvencija oscilovanja (slika 1).



Slika 1. Klatno čija tačka vešanja osciluje periodično.

Figure 1. Pendulum whose pivot point oscillates periodically.

U ovom radu proučavan je prelazak sistema u haotičan režim kretanja. Konstruisana je aparatura koja je aproksimacija ovog sistema, a koja je specifična je zbog mehanizma koji obezbeđuje periodično oscilovanje oslonca. Zatim su pomoću

Petra Šešelja (1996), Novi Sad, Kružna 2, učenica 2. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu

Kristina Gligorić (1995), Novi Sad, Doža Đerđa 19, učenica 4. razreda Gimnazije „Jovan Jovanović Zmaj” u Novom Sadu

MENTORI:

Stevan Radanović, Seven Bridges Genomics, Beograd

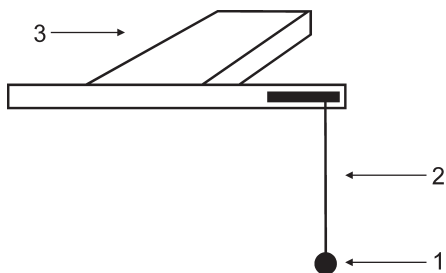
Mario Cekić, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Novi Sadu

programa urađenog u programskom paketu Mathematica, pronađeni parametri pri kojima bi se u ovom sistemu trebao javiti haos. Neki parametri su fiksirani – koeficijent prigušenja (γ) i frekvencija oscilovanja (ω), dok su neki parametri varirani – dužina niti (l) i amplituda oscilovanja (A).

Oscilovanje klatna je snimano i vršena je obrada snimaka. Iscrtavani su grafici uz pomoć kojih je bilo moguće odrediti da li sistem prelazi u haotičan režim kretanja.

Aparatura

Aparatura je sastavljena od kuglice (1), niti (2), mehanizma za pretvaranje kružnog kretanja motora u linearno oscilovanje oslonca (3), flopi diska koji u sebi ima Holov senzor i izvora napajanja (slika 2). Tehnički najteže ostvariv deo aparature je mehanizam za oscilovanje oslonca.

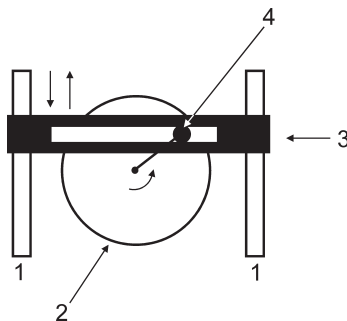


Slika 2. Korišćena aparatura: 1 – kuglica, 2 – nit, 3 – mehanizam koji pretvara kružno kretanje u linijsko.

Figure 2. Apparatus used in the experiment. It consists of a ball (1), thread (2) and the mechanism that converts circular into linear motion.

Mehanizam funkcioniše tako što se motor (2) postavi na podlogu i na deo motora koji rotira se pričvrsti vertikalna šipka (4) (slika 3). Iznad motora se postavi daščica sa prorezom za šipku (3), koja klizi između šina (1) dok se motor vrti. Jedan kraj daščice koja klizi između šina je duži i na njemu je okačena kuglica. Šine pričvršćene za podlogu, pa daščica za koju je okačeno klatno ne može da se pomera kružno zajedno sa motorom, nego se pomera samo u jednoj dimenziji, odnosno linearno. Promenom napona na izvoru se menja frekvencija motora. Na izvoru se pomoću

Holovog senzora, ugrađenog u motor, očitava ugaona frekvencija motora, koja je jednaka ugaonoj frekvenciji oscilovanja tačke oslonca klatna.

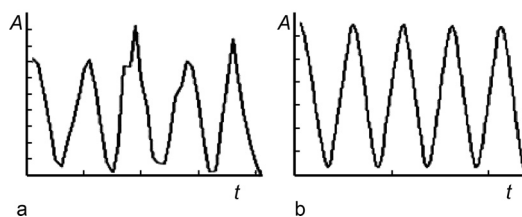


Slika 3. Skica mehanizma koji pretvara kružno kretanje u linijsko: 1 – šine, 2 – motor, 3 – daščica koja klizi po šinama i za koju je okačeno klatno, 3 – šipka pričvršćena za motor.

Figure 3. Scheme of the mechanism that converts circular into linear motion. It consists of tracks (1), motor (2), slider to which the pendulum is attached (3) and a small rod that is attached to the motor.

Klizač i šine su prvo bili napravljeni od metala. Međutim, motor koji je korišćen je motor od flopi diska, snage 5 W. Takav motor nije bio dovoljno snažan da pokrene mehanizam sa delovima od metala. Zatim je ležać napravljen od plastike, ali u takvom mehanizmu je trenje bilo preveliko i motor opet nije mogao da ga pokrene. U postavci aparature koja je korišćena, klizač je bio napravljen od drveta, da bi bio dovoljno lak, ali je bio oblepljen trakama aluminijuma da se umanjí trenje.

Zbog pomenutih problema, pre početka merenja je analizirano oscilovanje tačke oslonca sa okačenom kuglicom, kako bi se potvrdilo da je ono dovoljno blizu sinusoidnom. Tačka vešanja je bila obeležena kontrastnom bojom u odnosu na zastor i oscilovanje je snimano kamerom. Iz snimaka je programskim putem iscrtavan položaj tačke vešanja tokom oscilovanja (slika 4a). Za iscrtavanje grafika je korišćen programski paket Matlab. Mehanizam je potom poboljšan tako što je klizač oblepljen aluminijumom kako bi se smanjilo trenje i šine su bolje pričvršćene. Zatim je vršena nova analiza. Sa slike 4b se vidi da je oscilovanje oslonca periodično.



Slika 4. Grafik zavisnosti amplitude tačke oslonca od vremena za: a) prvu aparaturu, b) drugu aparaturu.

Figure 4. Graph representing the dependence of the amplitude of the pivot point on time for: a) the first apparatus, b) the second apparatus.

Zatim je snimano kretanje kuglice i kretanje oslonca. Kao i tačka oslonca, kuglica je bila markirana kontrastnom bojom u odnosu na zastor. Vršena je obrada snimaka na osnovu čega su dobijene koordinate tačke oslonca i koordinate kuglice u zavisnosti od vremena. Program funkcioniše tako što se snimak podeli na slike i na svakoj slici se pronalazi centar kuglice i sredina oslonca. Na osnovu njihovih koordinata se računa ugao otklona kuglice u odnosu na vertikalnu osu.

Metod

Pre izvođenja eksperimenta, bilo je neophodno pronaći parametre pri kojima sistem prelazi u haotičan režim kretanja. U programskom paketu Mathematica simulirana su dva klatna čije kretanje opisuju jednačine sa istim parametrima, s tim da postoji mala razlika u početnim uslovima, odnosno u početnom uglu otklona θ_0 . Zbog velike osetljivosti na početne uslove koja karakteriše kaos, ta razlika pri određenim parametrima raste eksponencijalno tokom vremena, dok ekstremi funkcije zavisnosti $\log \Delta\theta$ od vremena rastu linearno.

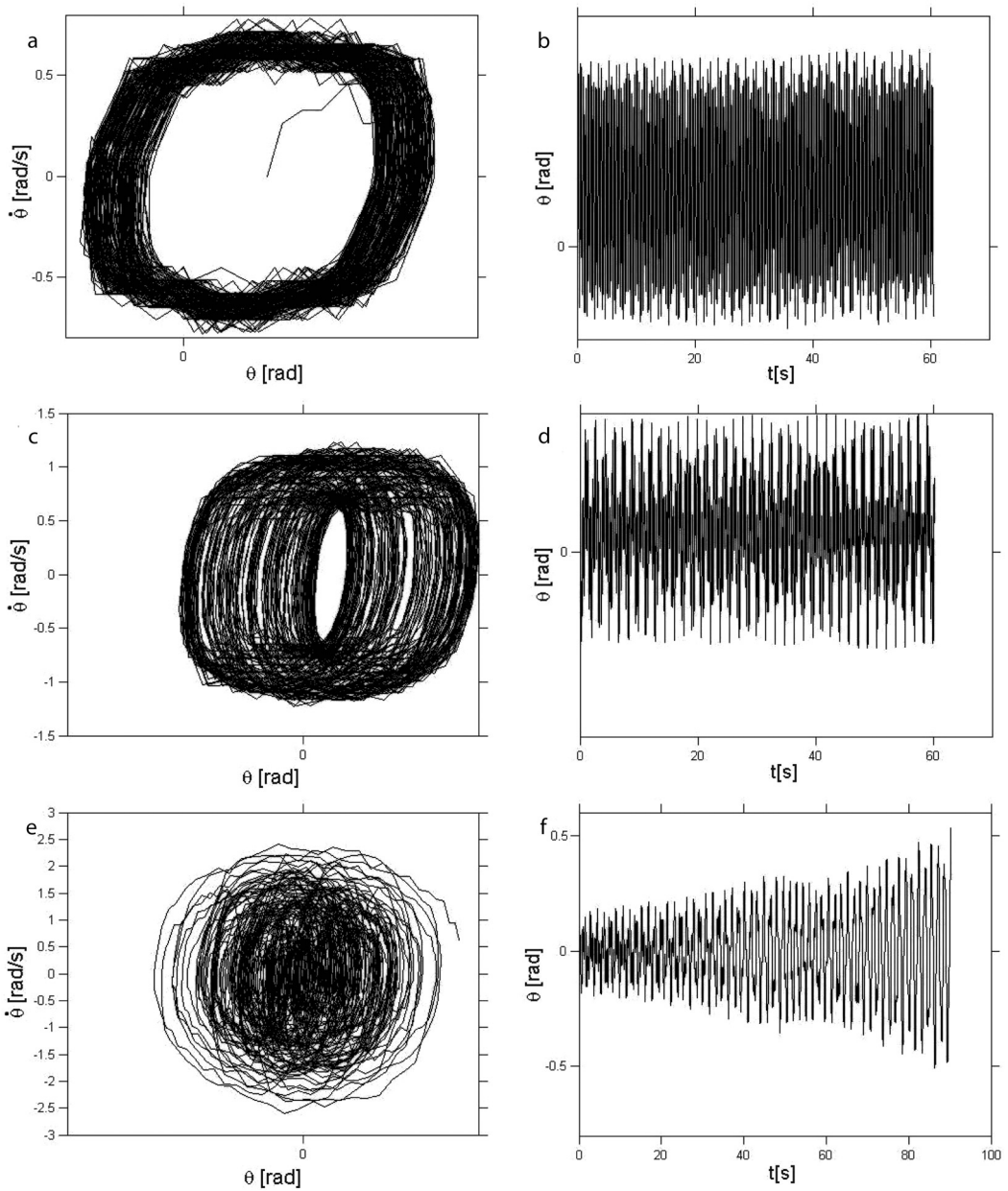
Da bi se pronašli parametri pri kojima sistem prelazi u haotičan režim kretanja, vrednosti parametara su varirane u određenim okvirima i na logaritamskoj skali iscrtavani su grafici zavisnosti razlike ugla otklona za dve simulacije. Parametri koje je bilo moguće varirati su dužina klatna, amplituda oscilovanja tačke oslonca, koeficijent prigušenja (koji zavisi od mase kuglice) i frekvencija oscilovanja tačke oslonca. Od tih

parametara, frekvencija oscilovanja tačke oslonca i koeficijent prigušenja su fiksirani, dok su dužina klatna i amplituda oscilovanja tačke oslonca varirani. U eksperimentu su korišćeni setovi parametara za koje je zavisnost ekstrema približno linearna.

Merenja su vršena za šest različitih setova parametara dobijenih simulacijom. Konstantni parametri za sva merenja su bili $\gamma = 0.0024 \text{ s}^{-1}$ i $\omega = 12.4 \text{ s}^{-1}$. Dužina klatna je bila različita za različite setove parametara. Merenja su vršena tako što su za jedan set parametara svi parametri bili fiksni osim amplitude oscilovanja tačke oslonca, koja je bila varirana. Očekivano je da povećanjem amplitude sistem prelazi iz periodičnog u haotični režim tako što se periodi udvostručavaju, to jest dolazi do bifurkacija. Prvim udvostručavanjem perioda nastaje bifurkacija prvog reda, odnosno sistem osciluje sa dva perioda. Sledećim udvostručavanjem dolazi do bifurkacije drugog reda i sistem osciluje sa četiri perioda. Bifurkacija trećeg reda podrazumeva oscilovanje sa osam perioda i tako dalje, dok se ne dostigne kritična amplituda pri kojoj sistem prelazi u haotičan režim (Taylor 2005).

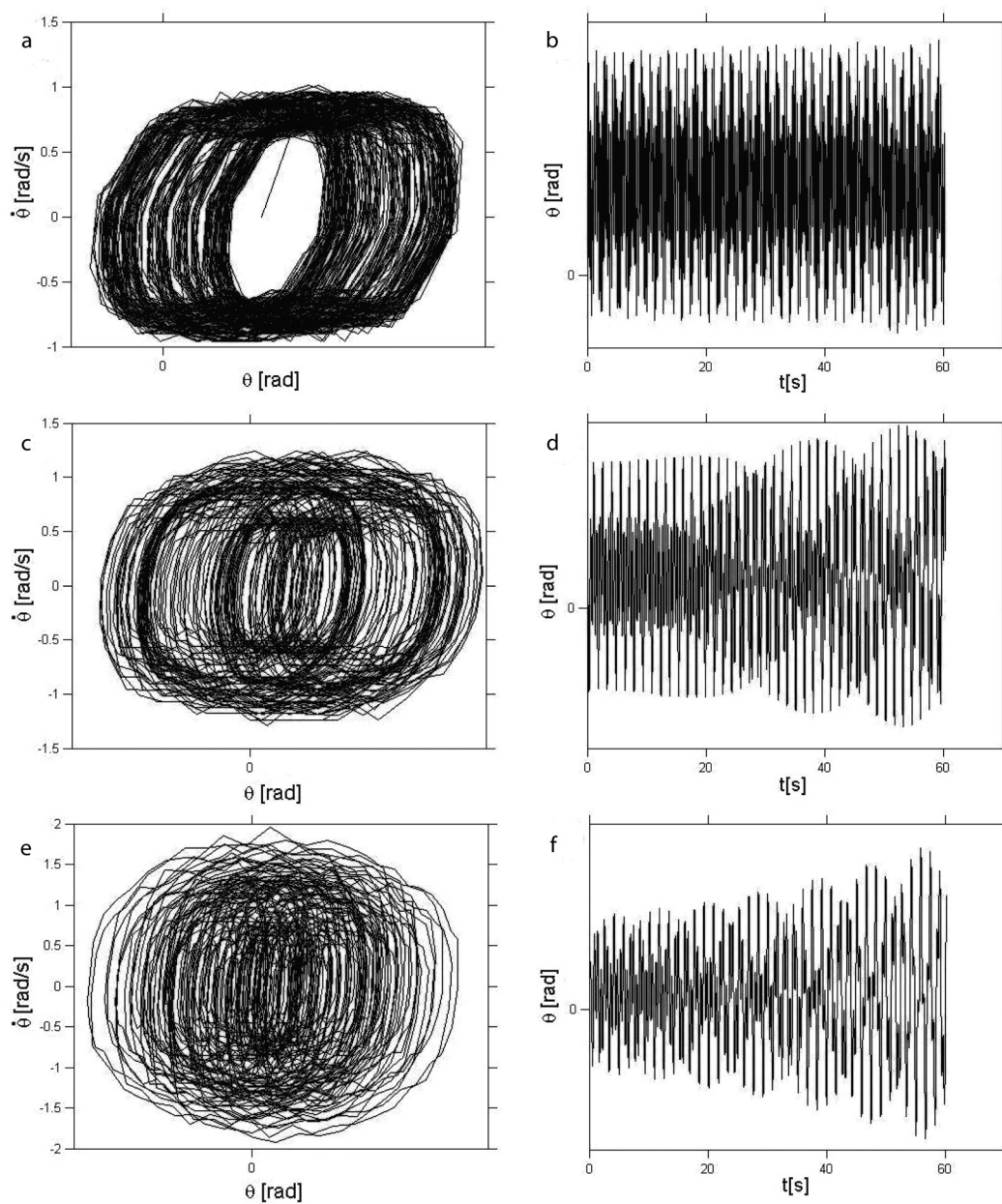
Kretanje ovog sistema je sagledano kroz grafike ugla otklona u zavisnosti od vremena i faznih dijagrama. Sa grafika zavisnosti ugla otklona od vremena se ne može uočiti da li je u pitanju periodično oscilovanje ili haotični režim, ali ako je u pitanju bifurkaciono kretanje, može se zaključiti kog je reda bifurkacija. U faznom prostoru su iscrtana sva moguća stanja nekog sistema i jedna tačka faznog prostora određuje jedno stanje sistema. Ako se tačka nakon određenog vremena ponovo nađe na mestu u kom je bila ranije, ona mora da nastavi da se kreće po istoj putanji, odnosno periodično. U suprotnom bi bio narušen determinizam, to jest bilo bi nemoguće odrediti sledeće stanje sistema ako je poznato prethodno.

Simulacijom faznog prostora za parametre koji su korišćeni u eksperimentu može se uočiti da se putanje u faznom dijagramu seku. To se tumači time što svaka tačka na grafiku zavisnosti ugaone brzine klatna od vremena ne označava jednoznačno jedno stanje klatna. Naime, moguće je da se desi da su za kuglicu u dva različita trenutka ugao otklona u odnosu na vertikalnu osu i ugaona brzina klatna jednaki, ali da položaj



Slika 5. Dijagrami faznog prostora (levo) i grafici zavisnosti ugla otklona od vremena (desno) za prvu dužinu klatna.

Figure 5. Phase portraits (left) and graphs representing dependency of inclination angle of the pendulum on time (right) for the first length of the pendulum.



Slika 6. Dijagrami faznog prostora (levo) i grafici zavisnosti ugla otklona od vremena (desno) za drugi set parametara.

Figure 6. Phase portraits (left) and graphs representing dependency of inclination angle of the pendulum on time (right) for the second length of the pendulum.

kuglice nije isti zbog oscilovanja oslonca tačke oslonca. Fazni dijagrami dobijeni analizom snimaka su zbog toga tumačeni tako što je posmatrano da li postoje periodična ponavljanja veoma bliskih putanja, bez obzira na to da li se putanje seku ili ne.

Rezultati i diskusija

Predstavljeni su oni rezultati koji najbolje prikazuju prelazak sistema iz periodičnog u haotični režim kretanja. Za sva merenja održavani su konstantnim frekvencija oscilovanja tačke oslonca $\omega = 12.4 \text{ s}^{-1}$ i koeficijent prigušenja $\gamma = 0.0024 \text{ s}^{-1}$. Varirane su dužina klatna i amplitude oscilovanja tačke oslonca, tako da su za svaku dužinu klatna vršena po tri merenja, za vrednosti amplitude od 2.7 cm, 3.9 cm i 5.1 cm.

U prvom merenju dužina niti je (slika 5). Prvi grafik predstavlja ravnomerno periodično oscilovanje. Ekstremi ugla otklona ne uzimaju iste vrednosti zbog nesavršenosti aparature (5b). Povećavanjem amplitude dolazi do udvostručavanja perioda. Klatno tada osciluje sa osam perioda, to jest donji ekstrem ugla otklona ciklično uzima osam različitih vrednosti, tako da je u pitanju bifurkacija trećeg reda. To se vidi sa grafika 5d jer se osam različitih ekstrema periodično ponavljaju. Daljim povećavanjem amplitude sistem prelazi u kaos zato što ne postoje periodična ponavljanja u faznom dijagramu (5e).

Slika 6 predstavlja fazne dijagrame i grafike zavisnosti ugla od vremena kada je $l = 0.55 \text{ m}$. I u ovom slučaju, broj perioda se povećava s povećavanjem amplitude. Na grafiku 6a je prikazana bifurkacija drugog reda. Donji ekstrem ciklično uzima četiri različite vrednosti (6b). Sa grafika 6c i 6d se vidi da sistem osciluje sa puno perioda. Grafici 6e i 6f predstavljaju haotični režim.

Na graficima periodičnog i bifurkacionog kretanja javljaju se odstupanja, zbog nesavršenosti aparature. Najveći nedostatak aparature je što je oscilovanje oslonca aproksimacija sinusnog oscilovanja. Veliku smetnju predstavlja i trenje unutar mehanizma – trenje između šina i daščice, daščice i šipke, itd. Rezultati bi mogli biti precizniji kada bi mehanizam bio napravljen veoma precizno i od materijala koji bi smanjio trenje.

Zaključak

U ovom radu je vršeno eksperimentalno dokazivanje haosa u kretanju sistema klatna sa oscilujućom tačkom vešanja. Aparatura, koja se sastojala od mehanizma za pretvaranje kružnog kretanja u translatorno i klatna, napravljena je na jednostavan način i kretanje klatna je snimano. Obradom snimaka je pokazano prisustvo haosa na korišćenoj aparaturi. Mehanizam korišćen za pretvaranje kružnog kretanja u translatorno funkcioniše po vrlo jednostavnom principu, usled čega može biti od velike koristi u sličnim situacijama.

Aparatura može biti poboljšana preciznijom izradom i redukcijom trenja. Takođe, amplitudu bi se mogla varirati sa manjim korakom. Tada bi se mogle koristiti i druge metode proučavanja haosa, poput proučavanja dijagrama bifurkacija i logističkih mapa.

Zahvalnost. Zahvaljujemo se mentoru, Mariju Cekiću, kao i saradnicima na programu fizike Vladanu Pavloviću i Stevanu Radanoviću na velikoj podršci i korisnim savetima. Zahvaljujemo se i Miroslavu Bogdanoviću za ideje pri konstruisanju aparature.

Korišćena literatura

Jeong J., Kim S-Y. 1999. Bifurcations in a Horizontally Driven Pendulum. *Journal of the Korean Physical Society*, **35** (5): 393.

Kolář M., Gumbs G. 1992. Theory for the experimental observation of chaos in a rotating waterwheel. *Physical Review A*, **45** (2): 625.

Salom S. 1999. Haos pri pobuđenom i prigušenom kretanju fizičkog klatna. U *Petničke Sveske*, 49 (ur. B. Savić). Valjevo: Istraživačka stanica Petnica, str. 55-68.

Taylor J. 2005. *Classical Mechanics*. University Science Books

Petra Šešelja and Kristina Gligorić

Experimental Determination of Chaos in a Damped Driven Pendulum

This paper presents a way of experimental determination of chaos in a simple dynamical system. It is a system of a pendulum with an oscillating pivot. The apparatus used in the experiment consists of the pendulum, the mechanism that converts circular into linear motion and a motor that oscillates in a circular motion. Mechanism, although simple, was not easy to create with the materials available, and problems appeared which were eventually overcome.

After assembling the apparatus, parameters in which the movement of the system would turn

chaotic was supposed to be found. A program in Mathematica was used, which simulated two pendulums with almost exact beginning parameters except for one (inclination angle). For certain parameters, that one small difference was the catalyst for the system to turn chaotic. Those parameters were later on used in the experiment. Measuring was done by varying the amplitude of oscillation for those predetermined parameters. It was expected that increasing the oscillating amplitude would lead to a transition from a periodic to a chaotic regime, throughout bifurcations, until the critical amplitude is reached. The system was then filmed, and those videos were analyzed. The data was interpreted using phase portraits and graphs representing dependency of the inclination angle of the pendulum on time (Figures 5 and 6). The hypothesis was confirmed and it was proven that with this apparatus, chaotic movement did appear. 