Nikola Mrkšić i Stefan Badža

Distribucija bogatstva unutar društva

Proučavanje distribucije bogatstva prouzrokuje znatnu količinu interesovanja zbog trenutne ekonomske krize. Rađeno je proučavanje distribucije bogatstva pomoću analogije između tržišta i idealnog gasa. U ovom radu opisana su dva modela interakcija između agenata. Uvedena je entropija radi pokazivanja stabilnosti sistema. Dobijeni rezultati prikazuju raspodelu bogatstva u društvu u zavisnosti od faktora štednje i poreza.

Uvod

Ekonofizika je zasnovana sredinom devedesetih godina dvadesetog veka pomoću statističke mehanike. Korišćenje analogije između idealnog gasa i tržišta su znatno unapredili Arnab Chatterjee i Bikas Chakarbarti sa Instituta za fiziku u Kalkuti. Njihov glavni doprinos ekonofizici bio je uvođenje pojma faktora štednje, koji je imao popriličan uticaj na dalji razvoj ekonofizike. Napisana je simulacija u kojoj je korišćena analogija agenata na tržištu sa molekulima idealnog gasa. Slično kao što molekuli razmenjuju impuls i energiju, tako agenti na tržištu razmenjuju kapital. Pri „sudaru“ dva agenta, određena količina kapitala prelazi iz ruku jednog u ruke drugog agenta. Interakcija između agenata definisana je unapred zadatim parametrima. Dizajnirana su dva različita modela. U prvom modelu verovatnoća da jedan agent prevagne nad drugim agentom direktno je proporcionalna odnosu njihovih kapitala, te je dodatno modifikovana odnosom između delatnosti data dva agenta. Na primer, agent koji se bavi prodajom kompjuterskih komponenti je u prednosti u odnosu na agenta koji sklapa računare, jer on bez njegovih komponenti ne može sklopiti računar. Da bi se ovo uspešno implementiralo, unapred definišimo skup relacija između svake dve delatnosti i nazovimo ga *matricom odnosa*. Nakon određenog ishoda borbe, gubitnik gubi uloženu svotu, koja se, oporezovana od strane države, prebacuje pobedniku. U drugom modelu, svakom agentu unapred se dodeljuje apstraktni „tip“, te u ovom modelu matrica odnosa unapred određuje ishod potencijalne interakcije između svaka dva tipa, dakle i između svaka dva agenta. *Faktor štednje*, svojstvo koje determiniše sklonost agenata ka riziku, određuje količinu kapitala koji menja vlasnika u interakciji.

Simulacija

Numerička simulacija je rađena u programskom jeziku C++. Izlazni podataci su krajnja raspodela bogatstva i promena entropije sa vremenom. Pri svakoj simulaciji prvo se određuje količina bogatstva svakog agenta K, i broj agenata N.

Kod prvog modela početna raspodela bogatstva može biti: 1 – Dirakova delta (kada svi agenti na početku imaju istu količinu kapitala), 2 – uniformna i 3 – Gausova raspodela.

Konstruiše se matrica odnosa, koja određuje kako delatnosti agenata utiču na njihov učinak na tržištu. Verovatnoća da jedan agent pobedi u interakciji – v_1, određena je formulom:

$$v_1 = \frac{k_1 \cdot m_1}{k_1 \cdot m_1 + k_2 \cdot m_2}$$

gde je k_1 ukupan kapital prvog agenta, k_2 ukupni kapital drugog agenta, dok su m_1 i m_2 konkretne vrednosti datog polja u matrici odnosa, koje određuju koliku prednost ima jedan agent u odnosu na drugog zbog svoje delatnosti. Na primer, ako je

Nikola Mrkšić (1991), Beograd, Rudo 3 11/112, učenik 3. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

Stefan Badža (1992), Beograd, Slobodana Jovanovića 23, učenik 2. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

MENTOR: Aleksandar Cvetković

$m_1 = 0.8$, prvi agent može imati i duplo manje kapitala od drugog, a opet biti u prednosti pri njihovoj interakciji. Verovatnoća da će drugi agent da pobedi je $v_2 = 1 - v_1$, jer ukupna verovatnoća mora da bude jednaka jedinici, tj. sigurnom događaju. Pošto ne postoji agent koji bi u realnosti uložio sav svoj kapital u jednu interakciju, količina uloženog kapitala zavisi od verovatnoće da iz te interakcije izađe kao pobednik. Taj kapital je sledećim formulama:
za prvog agenta:

$$K_1 = k_1 \cdot v_1 \cdot g$$

za drugog:

$$K_2 = k_2 \cdot v_2 \cdot g$$

pri čemu su K_1 i K_2 količine kapitala koje će agenti uložiti u interakciju, a g parametar između 0 i 1, određen po Gausovoj raspodeli sa matematičkim očekivanjem 0.5 i devijacijom od 0.5. Pobednik u interakciji dobija uložen kapital protivnika i zadržava svoj, ali mu se taj dobitak oporezuje od strane države. Uzimajući određeni procenat kapitala od dobitaka, država u simulaciji ima ulogu regulatora tržišta, sprečavajući da se pojedinci preterano obogate i time steknu dominaciju u odnosu na ostale agente, što se dešava pri puštanju simulacija u kojima se transakcije ne oporezuju. Posle određenog broja interakcija (vremena), država uzeti kapital ravnomerno raspoređuje svim agentima na tržištu. Tako se obezbeđuje da ne bude ekstremno siromašnih agenata.

U nekoliko stručnih radova na ovu temu (npr. Chakraborti i Chakrabarti 2000; Chatterjee i Chakrabarti 2007) se uvodi kao glavni parametar faktor štednje. U našem projektu uveden je u drugom tipu interakcije. Faktor štednje određuje koliki će procenat svog trenutnog kapitala agent uložiti u interakciji, i može varirati od 0 do 1. Uloženi kapital određen je formulom:

$$K_1 = k_1 \cdot (1 - \lambda)$$

gde je λ faktor štednje, a ostali parametri su označeni isto kao u prvom modelu. Faktor štednje je isti za sve agente: on pokazuje koliko je dato tržište sklono riziku, tj. koliko su svog kapitala agenti spremni da ulože u interakciju. Početna raspodela može se varirati na isti način kao i u prvom modelu. Pobednik u interakciji unapred je određen matricom odnosa. Ako je tip prvog agenta i, a drugog j, element matrice a[i, j] određuje pobednika. U toj matrici može se varirati broj delatnosti, kao i koje će delatnosti, tj. agenti, imati prednost u odnosu na druge.

Kako je proučavani dinamički sistem izolovan, kao i model idealnog gasa na kome je zasnovan, njegova entropija S je monotono neopadajuća funkcija vremena:

$$\frac{dS}{dt} \geq 0$$

Kad sistem dostigne ravnotežno stanje njegova entropija postaje konstantna. Praćenjem entropije može se videti kako sistem evoulira i odrediti u kom trenutku dostiže ravnotežu, te tako odrediti koliko dugo simulacija sistema treba da traje. Entropija sistema je definisana kao:

$$S = -\ln W$$

gde je W broj načina na koji ukupno bogatstvo može biti podeljeno među agentima tako da se postigne ista funkcija raspodele bogatstva.

Da bi se izračunala entropija prvo se brojna osa na kojoj je prikazana ukupna količina novca $m = K \cdot N$ podeli na male, jednake intervale širine dm, koji se označe indeksom i, $i \in N$. Broj agenata koji poseduju bogatstvo čija je vrednost iz i-tog intervala je označen sa N_i, te je ukupan broj agenata:

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} N_i$$

Količina novca iz intervala i je jednaka m_i, a ukupna količina novca je:

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} m_i N_i$$

Funkcija raspodele bogatstva može se identifikovati sa vektorom popunjenosti $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots)$. Tada je broj načina na koji se agenti mogu rasporediti po intervalima, a da se pritom dobije isti vektor $\mathbf{N}$, jednak:

$$W = \frac{N!}{N_1!\,N_2!\ldots N_i!\ldots}$$

a ukupna entropija je:

$$S = \ln N! - \sum_{i=1}^{\infty} \ln N_i!$$

Korišćenjem Strilingove formule: $\ln N! \approx N \ln N$, uz pretpostavku da su N_i dovoljno veliki brojevi, dobija se entropija po agentu:

$$S=\frac{1}{N}(N\ln N-\sum\nolimits_{i=1}^{\infty}N_i\ln N_i)=$$

$$=\frac{1}{N}(\sum\nolimits_{i=1}^{\infty}N_i\ln N-\sum\nolimits_{i=1}^{\infty}N_i\ln N_i)=$$

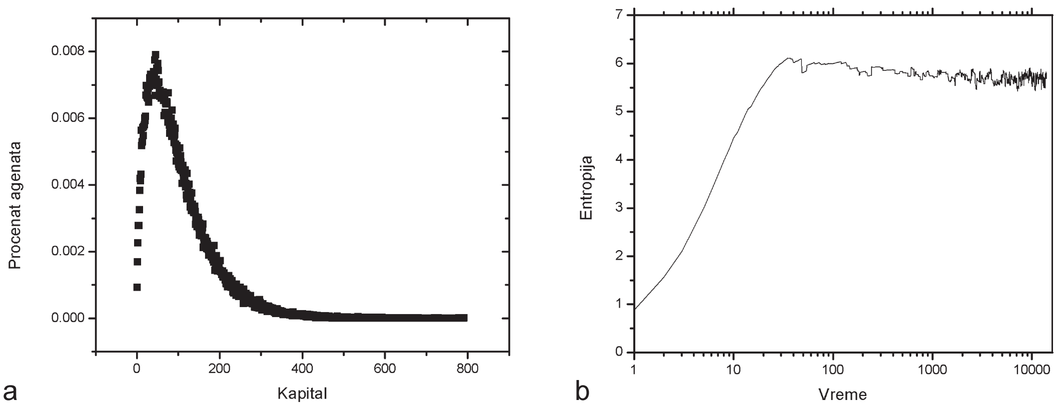
$$=\sum\nolimits_{i=1}^{\infty}\frac{N_i}{N}\ln\frac{N_i}{N}$$

Poslednja formula se koristi za računanje entropije u svakom trenutku simulacije. Među izlaznim podacima se nalaze podaci o entropiji u zavisnosti od vremena.

Rezultati i diskusija

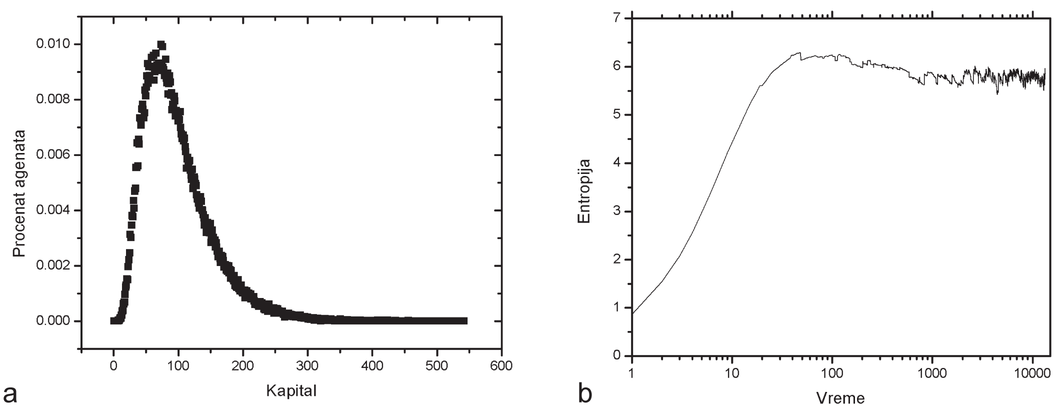
U prvom modelu je variran procenat poreza koji država uzima pri interakcijama. Početni kapital je isti za sve agente i iznosi K = 100. Na tržištu ima N = 100 000 agenata koji međusobno interaguju.

Na graficima 1a, 2a i 3a se može primetiti da se entropija stabilizuje, odnosno da sistem postaje stabilan nakon određenog vremenskog intervala. Krajnja raspodela bogatstva ne zavisi od početne, i ponašanje entropije u našim modelima potvrđuje naša predviđanja. Manje promene u entropiji se



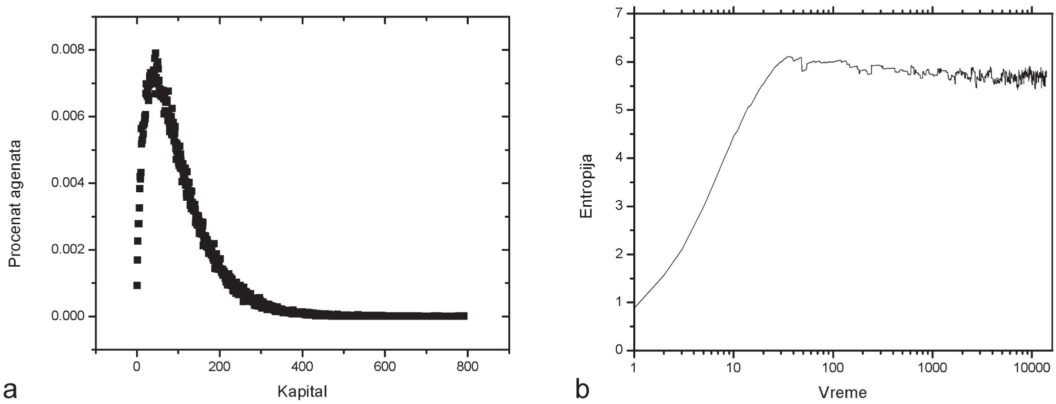
Slika 1. Raspodela bogatstva (a) zavisnost entropije od vremena (b) pri poreskoj stopi od 0%

Figure 1. The distribution of wealth (a) and the dependence of entropy against time (b) with tax rate of 0 percent



Slika 2. Raspodela bogatstva (a) i zavisnost entropije od vremena (b) pri poreskoj stopi od 40%

Figure 2. The distribution of wealth (a) and the dependence of entropy against time (b) with tax rate of 40 percent



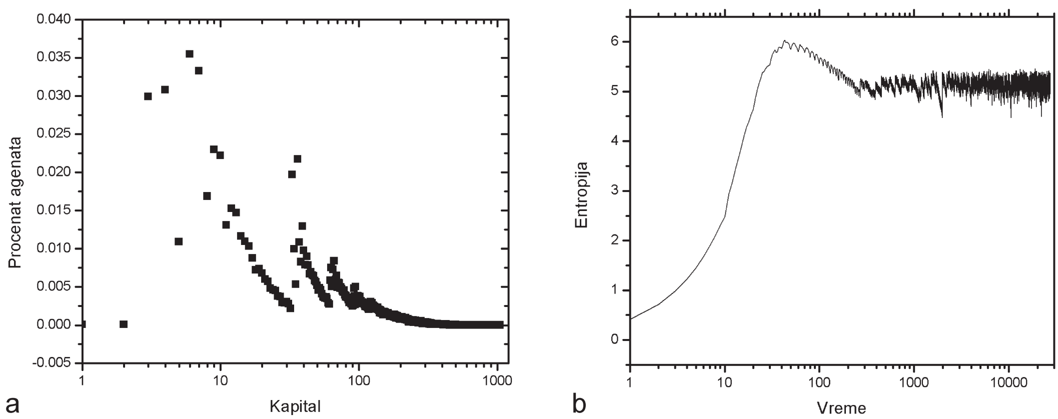
Slika 3. Raspodela bogatstva (a) i zavisnost entropije od vremena (b) pri poreskoj stopi od 80%

Figure 3. The distribution of wealth (a) the dependence of entropy against time (b) with tax rate of 80 percent

mogu videti kada se ubrani porez vraća u sistem. Finalna raspodela zavisi od nekih početnih parametara. Ukoliko je broj agenata dovoljno veliki, on nema uticaja na konačnu raspodelu bogatstva. Na slici 1 se može primetiti da je pik grafika dosta bliži nuli nego na graficima na 2a i 3a. To je zato što nema poreza koji bi uveo ravnotežu između bogatih i siromašnih. Ovako će se desiti da mnogi agenti dođu do ivice bankrota, a da mali procenat agenata kontroliše veliku količinu ukupnog kapitala. Na graficima 2a i 3a se primećuje pomeraj pika ka većem kapitalu, odnosno jačanje srednje klase. Dakle, što je veći porez, broj siromašnih je manji, a jača je srednja klasa.

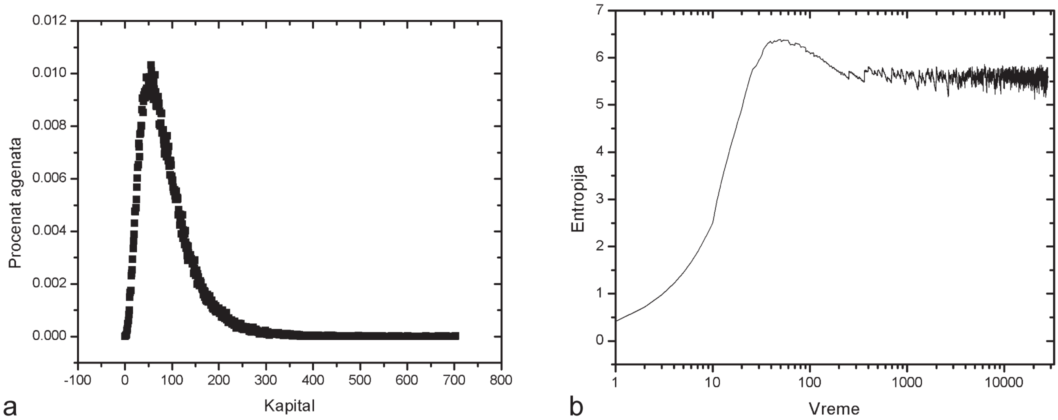
U drugom modelu je variran faktor štednje kod agenata; svi agenti imaju isti faktor štednje. Početni kapital je isti za sve agente i iznosi 100. Na tržištu ima 100 000 agenata koji međusobno interaguju, dok u matrici odnosa ima 50 tipova agenata.

Slično kao u prvom modelu entropija se stabilizuje, što pokazuje da i ovde konačna raspodela kapitala ne zavisi od početne. Menjanjem faktora štednje menja se količina kapitala koju su agenti spremni da ulože u interakciju. Veća vrednost faktora štednje odgovara većoj averziji prema riziku, dok manje vrednosti ukazuju da su agenti skloniji rizičnim ulaganjima. Sa grafika na slikama 4, 5 i 6



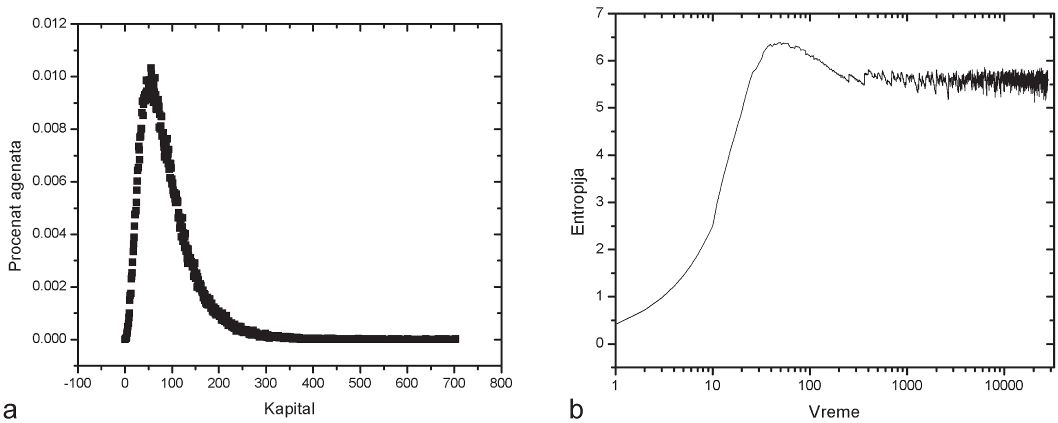
Slika 4. Raspodela bogatstva (a) i zavisnost entropije od vremena (b) pri faktoru štednje od 0.1

Figure 4. The distribution of wealth (a) and the dependence of entropy against time (b) with savings factor of 0.1



Slika 5. Raspodela bogatstva (a) i zavisnost entropije od vremena (b) pri faktoru štednje od 0.5

Figure 5. The distribution of wealth (a) and the dependence of entropy against time (b) with savings factor of 0.5



Slika 6. Raspodela bogatstva (a) i zavisnost entropije od vremena (b) pri faktoru štednje od 0.9

Figure 6. The distribution of wealth (a) and the dependence of entropy against time (b) with savings factor of 0.9

se može primetiti da što je veći faktor štednje srednja klasa postaje jača, pošto agenti ulažu manje kapitala nego pri manjim faktorima štednje, što se može primetiti po nižoj vrednosti pika u raspodeli, kao i manjoj standardnoj devijaciji. Ovi rezultati odgovaraju rezultatima iz radova (Nunes Amaral *et al*. 1997) koji su rađeni na ovu temu, ali bez upotrebe matrice odnosa, za koju pretpostavljamo da prema dobijenim rezultatima doprinosi dobijanju boljih i preciznijih rezultata.

Zaključak

Projekat je koncipiran kao integracija do sada implementiranih ideja u ekonofizici sa idejom o unapred definisanim matricama delatnosti. Smišljena su dva modela po kojima se mogu emulirati interakcije između agenata. Dobijeni rezultati raspodele bogatstva u skladu su sa navedenom literaturom na ovu temu (Cvetković 2008).

Korišćena je analogija između kinetičkog modela idealnog gasa i molekula koji interaguju međusobno, sa tržištem i agentima koji interaguju međusobno. U prvom modelu su zadate verovatnoće za interakcije, te dobijene formule za realizaciju simulacije, pomoću koje su dobijeni rezultati. Za drugi model je korišćen sličan model onima rađenim pomoću faktora štednje. Ključno za oba modela je korišćenje i uvođenje matrice odnosa. U prvom modelu je taj odnos konstruisan kao parametar koji će prikazivati koja grana privrede ima prednost u odnosu na neku drugu granu. Krucijalan je trenutni kapital oba agenta, jer agent sa više kapitala samim tim ima prednost u odnosu na drugog. Matrica odnosa u drugom modelu definiše koji agent pobeđuje u interakciji, a i u njoj možemo varirati broj tipova agenata. Faktor štednje dalje utiče na razvoj tržišta, određujući koliko su agenti spremni da rizikuju u interakcijama. Uvođenjem entropije u oba modela pokazano je da konačna raspodela bogatstva ne zavisi od početne, odnosno da posle nekog vremena, tj. broja interakcija, sistem dostiže ravnotežu koja se dalje ne narušava i raspodela se ne menja, iako se svakako menjaju položaji određenih agenata u toj raspodeli.

Postoje mnoga eventualna poboljšanja naših modela, uključijući neka od sledećih: variranje raspodele poreza, kreiranje dominantnih tipova na tržištu (proučavanje monopola), razvijanje dodatnih tipova agenata (tj. evoluiranje matrice odnosa) i ubacivanje novih agenata na tržište tokom njegovog razvoja (tj. implementiranje investicija).

Zahvalnost. Zahvaljujemo se našem mentoru Aleksandru Cvetkoviću, koji nam je uvek pomagao u ključnim trenucima kao i mlađim saradnicima na programu fizike Stevanu Radanoviću i Vladanu Pavloviću.

Literatura

Chakraborti A, Chakrabarti B. K. 2000. Statistical mechanics of money: how saving propensity affects its distribution. *The European Physical Journal B,* **17**: 167

Chatterjee A., Chakrabarti B. K. 2007. Ideal-gas-like market models with savings: Quenched and annealed cases. *Physica A*, 382: 36.

Cvetković A. 2008. Određivanje raspodele bogatstva u okviru kinetičkog modela tržišta u razvoju. Diplomski rad, Fizički fakultet Beograd, Cara Dušana 13

Nunes Amaral, L. A., Buldyrev S. V., Havlin S., Leschhorn H., Maass F., Salinger M. A. Eugene Stanley H., Stanley M. H. R. 1997. Scaling behavior in economics: I. Empirical results for company growth. *J. Phys. I France*, **7**: 621.

Nikola Mrkšić and Stefan Badža

Distribution of Wealth in Society

Econophysics developed in the mid-twentieth century from statistical mechanics. The use of the analogy between the ideal gas and the market was further improved with the introduction of the concept of the savings factors, which had a significant impact on the further development of this branch of physics.

We created a simulation which used the analogy between the ideal gas molecules and the market agents. As those molecules exchange momentum and energy, the agents on the market exchange funds. During the “collision” of two agents, a certain amount of wealth moves from the hands of one to the hands of the other agent. Interaction between agents is defined by pre-defined parameters. Two different market models have been created.

In the first model, the probability that an agent will prevail over the other agent is directly proportional to the ratio of their capital, and is further modified by the relation between the work activities of these two agents. To do this successfully we implemented a pre-defined matrix of relations, a set of relations between any two work activities. After a certain outcome of the fight, the loser loses the invested amount, which is, after being taxed by the state, transferred to the winner. In the second model, each agent is assigned some abstract “type” in advance, and the matrix of relations pre-determines the outcome of potential interactions between any two types, i.e. between every two agents. The savings factor, a property that determines the tendency of agents to take risks, determines the amount of money that is lost by the losing agent to the victor. The observed dynamic system is isolated, like the ideal gas it is based on, so its entropy, S, is a monotonically increasing function of time. When the system reaches equilibrium, its entropy becomes constant. By measuring entropy, we can track the evolution of the system and pinpoint the moment it reaches balance.

The most compelling graph for the second model is 4a; it is the one most interesting and disturbing at the same time. We could have expected a distribution with a large tail (very rich agents), and a peak of practically bankrupt agents. Yet, with such a radically low savings factor, in addition to a small number of work types (just ten), it is mathematically justified to expect that the strongest type will quickly seize a large amount of money, and that the next strongest type will dominate the other agents, making the subsequent local function optimums, and delivering to us such an interesting graph.

There are many possible improvements to our models, including, but not limited to some of the following: changing the tax money distribution (changing the social policy), creating very dominant types (research of monopoly), development of additional types of agents during the simulation (relation matrix evolution) and addition of more agents to the market during the simulation (implementation of investments).