

---

Marija Šindik

# Laserovanje bez inverzije naseljenosti na kvantnim tačkama

---

*Ovaj rad se bavi efektom propagacije laserske svetlosti bez inverzije naseljenosti na sistemu kvantne tačke koji se sastoji od četiri energetska nivoa. Posmatrana je sferna kvantna tačka sa nečistoćom u sredini, koja je postavljena u homogeno magnetno polje. Finite-difference metodom su numerički izračunate vrednosti energetskih nivoa i talasne funkcije elektrona u kvantnoj tački. Izabrana su četiri nivoa koja se nalaze u diamond konfiguraciji. Na sistem se deluje sa četiri lasera određenih frekvencija i posmatrano je pojačanje jednog od njih. Pokazano je kako variranje određenih parametara, kao što su frekvencije i jačine lasera, relativna faza i jačina magnetnog polja, utiču na pojačanje laserke svetlosti i diskutovano je koja je optimalna kombinacija za postizanje najvećeg pojačanja.*

---

## Uvod

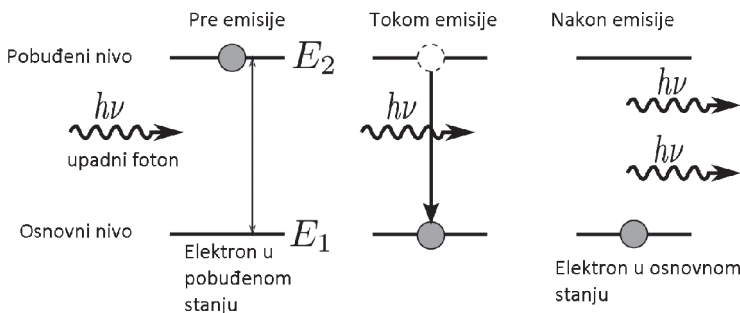
Kvantne tačke su poluprovodničke strukture koje ograničavaju kretanje elektrona u sve tri prostorne dimenzije. Sastoje se od nekoliko stotina do nekoliko stotina hiljada atoma u formi kristalne rešetke. Njihova veličina je reda nanometra i mogu imati razne oblike. Unutrašnjost kvantne tačke je napravljena od jednog poluprovodnika, a spoljašnjost od drugog. Usled razlike u energijama valentnih i provodnih zona, neki elektroni se nalaze u provodnoj zoni materijala od koga su napravljene kvantne tačke, a u zabranjenoj zoni okolnog materijala. Iz tog razloga njihovo kretanje je ograničeno unutar kvantne tačke (ukoliko nemaju dovoljnu energiju da savladaju potencijalnu barijeru). Zbog toga, i zbog njihove male veličine, u kvantnim tačkama se, slično kao i u atomima, ispoljavaju kvantni efekti, zbog čega su pogodne za postizanje efekta laserovanja bez inverzije naseljenosti.

Laserovanje bez inverzije naseljenosti podrazumeva pojačanje laserke svetlosti u sredini, u kojoj nema inverzne naseljenosti između nižih i viših nivoa, što je neophodan uslov kod klasičnih lasera. Rad klasičnih lasera zasniva se na efektu stimulisane emisije. To je proces u kome upadni foton indukuje (stimuliše) elektron sa višeg energetskog nivoa da se deekscituje

---

*Marija Šindik (1997),  
Beograd (Zemun),  
Slobodana Glumca 12,  
učenica 4. razreda  
Matematičke gimnazije*

*MENTOR:  
Vladan Pavlović,  
Prirodno-matematički  
fakultet Univerziteta u  
Nišu, Departman za  
fiziku*



Slika 1.  
Proces stimulisane emisije

Figure 1.  
Simulated emission

na niži (slika 1). Potrebno je da upadni foton ima energiju približnu razlici ta dva energetska nivoa. Pri tome se emituje foton koji ima istu energiju, pravac, fazu i polarizaciju kao i upadni foton. Time se povećava broj identičnih fotona, odnosno pojačava se intenzitet koherentne laserske svetlosti. Međutim, pored stimulisane emisije, u atomu su mogući i drugi prelazi, kao što je apsorpcija. Tada pri interakciji sa upadnim fotonom elektron sa nižeg energetskog nivoa prelazi na viši, a foton bude apsorbovan. Pri tom procesu smanjuje se intenzitet svetlosti. Ajnštajn je pokazao da je u atomu verovatnoća dešavanja stimulisane emisije i apsorpcije jednaka. Zbog toga je, da bi došlo do pojačanja svetlosti, potrebno da se više fotona emituje nego što se apsorbuje, odnosno da bude više elektrona u pobuđenom stanju nego u osnovnom. To je poznato kao inverzija naseljenosti. Kako svaki sistem teži da bude u osnovnom stanju sa najnižom energijom, za normalne uslove je karakteristična obrnuta situacija – da se broj elektrona eksponencijalno smanjuje sa povećanjem energije nivoa (normalna naseljenost). Stoga je, da bi se postigla inverzna naseljenost potrebna za stvaranje laserske svetlosti, potreban neki spoljašnji izvor energije koji će sistem da dovede u takvo stanje (obično je to lampa koja emituje intenzivnu belu svetlost).

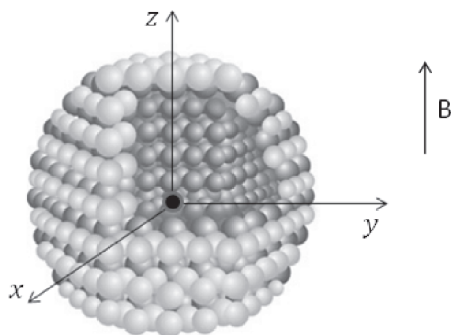
Efektima kvantne mehanike moguće je postići pojačanje laserske svetlosti bez inverzije naseljenosti. Osnovna ideja je da se atom pomoću spoljašnjih lasera dovede u stanje tako da se apsorpcija poništi, bez remećenja efekta stimulisane emisije. To je moguće postići tako što za elektrone sa nižeg energetskog nivoa postoje dva moguća „puta” kojima oni mogu preći na viši energetski nivo. Verovatnoće dešavanja ta dva prelaza destruktivno interferiraju. Elektroni su tada zarobljeni na nižem energetskom nivou, što dovodi do poništavanja apsorpcije. Elektroni koji se nalaze na višem energetskom nivou mogu da učestvuju u procesu stimulisane emisije, a to dovodi do pojačanja laserske svetlosti (Scully 1997).

**Cilj** rada je numerička simulacija i ispitivanje ovog efekta pri promenama različitih parametara od kojih zavisi. Opisan je model kvantne tačke koji se koristi i jednačine koje ga opisuju. Prikazana je numerička metoda koja se koristi za računanje energija i talasnih funkcija elektrona u kvantnoj tački. Zatim su izabrana četiri nivoa na koja se deluje laserima i opisan je proces računanja matrice gustine tog sistema. Pojačanje laserske svetlosti je posmatrano pri variranju odstupanja frekvencije, relativne faze, jačina lasera i magnetnog polja.

# Metod

## 1. Modelovanje kvantne tačke

U ovom radu je posmatrana kvantna tačka sfernog oblika, koja je napravljena od poluprovodnika galijum-arsenida (GaAs) i okružena nekim izolatorom. U centru kvantne tačke je postavljena nečistoća (slika 2). To može biti atom vodonika, čije je jezgro, odnosno proton, postavljen u centar kvantne tačke, dok se elektron kreće po njoj. Kao što je navedeno ranije, postoji određena potencijalna barijera koja sprečava elektrone da izađu izvan kvantne tačke (ako nemaju dovoljnu energiju). Pošto je ovde uzeto da je kvantna tačka okružena izolatorom, može se smatrati da je taj potencijal beskonačan, pa su talasne funkcije elektrona u potpunosti lokalizovane unutar kvantne tačke. Koordinatni početak je postavljen u centar kvantne tačke. Ceo sistem je postavljen u homogeno magnetno polje duž z-ose.



Slika 2.  
Model kvantne tačke sa  
nečistoćom u sredini

Figure 2.  
Quantum dot model  
with the on-center  
impurity

Radi jednostavnosti, dužine su izražene u jedinicama efektivnog Borovog radijusa  $a^*$ , a energije u jedinicama efektivnog Ridberga  $Ry^*$ . Ove dve veličine se računaju na isti način kao kod vodonikovog atoma, samo se umesto mase elektrona koristi efektivna masa  $m_e^*$ , a dielektrična konstanta se množi relativnom dielektričnom konstantom  $\epsilon_r$ :

$$a^* = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon_r\hbar^2}{m_e^*e^2} = \epsilon_r \frac{m_e}{m_e^*} a_0$$

$$Ry^* = \frac{m_e^*e^4}{32\pi^2\epsilon_0^2\epsilon_r^2\hbar^2} = \frac{1}{\epsilon_r^2} \cdot \frac{m_e^*}{m_e} Ry_0$$

gde su  $a_0$  i  $Ry_0$  vrednosti za vodonikov atom. Jačina magnetnog polja se izražava bezdimenzionim parametrom  $\beta = eBa^{*2} / \hbar$ , gde je  $e$  naelektrisanje elektrona,  $B$  magnetna indukcija i  $\hbar$  redukovana Plankova konstanta.

Šredingerova jednačina koja opisuje stanje elektrona unutar kvantne tačke je:

$$\hat{H}\Psi(r, \theta, \phi) = E\Psi(r, \theta, \phi) \quad (1)$$

gde je  $r$  rastojanje između elektrona i nečistoće,  $\theta$  je polarni, a  $\phi$  azimutalni ugao. Hamiltonijan sistema je (De Souza 2014):

$$\hat{H} = -\nabla^2 - i\beta \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\beta^2 r^2 \sin^2 \theta}{4} - \frac{2}{r}$$

Prvi član Hamiltonijana je Laplasijan – operator kinetičke energije. Sledeća dva člana koja sadrže  $\beta$  predstavljaju potencijal koji potiče od interakcije sa magnetnim poljem, a poslednji član predstavlja potencijal elektrostatičke interakcije sa nečistoćom. Kako je elektron ograničen unutar kvantne tačke, granični uslov  $\Psi(R, \theta, \phi) = 0$ , gde je  $R$  poluprečnik kvantne tačke, važi za sve uglove  $\theta$  i  $\phi$ . Pošto je sistem osnosimetričan oko  $z$ -ose, svojstvene funkcije operatora  $\hat{H}$  imaju definisane vrednosti ugaonog momenta duž  $z$ -ose, odnosno projekcija ugaonog momenta na  $z$ -osu je kvantovana. Zbog toga, svojstvene funkcije mogu biti zapisane kao:

$$\Psi_m(r, \theta, \phi) = \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \psi_m(r, \theta) \quad (2)$$

gde je  $m$  ceo broj, koji u suštini predstavlja magnetni kvantni broj. Nakon ubacivanja smene u jednačinu (1) i sređivanja, dobija se jednačina:

$$\hat{H}_m \psi_m(r, \theta) = E_m \psi_m(r, \theta)$$

gde je  $\hat{H}_m$  novi operator koji nakon raspisivanja Laplasijana ima oblik:

$$\begin{aligned} \hat{H}_m = & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \\ & + \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} + m\beta + \frac{\beta^2 r^2 \sin^2 \theta}{4} - \frac{2}{r} \end{aligned} \quad (3)$$

U zavisnosti od simetrije talasne funkcije duž  $z$ -ose, dodatni uslov važi:  $\psi_m(r, \pi - \theta) = \sigma \psi_m(r, \theta)$ , gde je  $\sigma = 1$  ako je funkcija simetrična i  $\sigma = -1$  ako je funkcija antisimetrična. Vrednost parametra  $\sigma$  se računa po formuli  $\sigma = (-1)^{l-m}$ , gde su  $l$  i  $m$  ugaoni i magnetni kvantni broj, redom. Sada je potrebno izvršiti numerička računanja samo za uglove  $\theta$  u opsegu  $[0, \pi/2]$ .

## 2. Numerički metod

Pošto nije moguće analitičkim metodama naći rešenje navedene diferencijalne jednačine, potrebno je to uraditi numerički. U ovom radu je korišćena *finite-difference* metoda. Ona se sastoji u diskretizaciji skupa na kome se traže rešenja. U ovom slučaju, na primer, traži se talasna funkcija koja zavisi od  $r$  koje uzima vrednosti iz skupa  $[0, R]$ . Umesto da se posmatra kontinualan skup, on se uniformno podeli nekim korakom  $h$ . Isto važi i za skup vrednosti koje uzima  $\theta$ . Na ovaj način se dobija mreža i vrednosti talasne funkcije se traže samo u čvorovima mreže. Prvi i drugi izvodi se aproksimiraju koristeći susedne čvorove mreže, po formulama:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Aproksimacija je tačnija ukoliko je  $h$  što manje.

Podela se može vršiti sa različitim brojem koraka za svaki parametar, ali je ovde uzeto da je broj koraka isti:  $h = R / (n+1)$  i  $k = \pi / (2n+2)$ , gde je  $n$  dovoljno veliki broj. Vrednosti talasne funkcije u čvorovima su označene kao  $G_{i,j} = \psi_m(r_i, \theta_j)$ , gde je  $(r_i, \theta_j) = ((i-1)h, (j-1)k)$ ,  $1 \leq i, j \leq n+2$ . Diskretizacijom jednačine (3) dobija se

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{h^2}(G_{i+1,j} - 2G_{i,j} + G_{i-1,j}) - \frac{1}{hr_i}(G_{i+1,j} - G_{i-1,j}) - \\ & -\frac{1}{k^2 r_i^2}(G_{i,j+1} - 2G_{i,j} + G_{i,j-1}) - \frac{\cot \theta_j}{2kr_i^2}(G_{i,j+1} - G_{i,j-1}) + \\ & + V_{i,j} G_{i,j} = E_m(n) G_{i,j} \end{aligned} \quad (4)$$

gde je

$$V_{i,j} = m\beta + \frac{m^2}{r_i^2 \sin^2 \theta_j} + \frac{\beta^2}{4} r_i^2 \sin^2 \theta_j - \frac{2}{r_i}$$

a  $E_m(n)$  je *finite-difference* aproksimacija energetskog nivoa  $E_m$ . Sa povećanjem broja  $n$  povećava se broj čvorova u mreži, a samim tim se preciznije računaju vrednosti prvih i drugih parcijalnih izvoda, pa i samih talasnih funkcija. Stoga je za bolju aproksimaciju energije potrebno uzeti što veće  $n$ .

Pošto svaki član u mreži zavisi od susednih, da bi se našlo rešenje, potrebno je postaviti granične uslove. Kako elektron ne može da se nalazi van kvantne tačke, važi  $\psi_m(R, \theta) = 0$ , odnosno  $G_{n+2,j} = 0$ , za svako  $j$ . Ako je  $\sigma = -1$ , funkcija bi trebalo da nestane u  $\theta = \pi/2$ , odnosno  $G_{i,n+2} = 0$ , a ako je  $\sigma = 1$ , parcijalni izvod po  $\theta$  nestaje u  $\pi/2$ , odnosno

$$G_{i,n} - 4G_{i,n+1} + 3G_{i,n+2} = 0.$$

Takođe, kao što se može zaključiti iz jednačine (2), da bi funkcija bila glatka na polarnoj osi, ona nestaje u  $\theta = 0$  ( $G_{i,1} = 0$ ), za  $m \neq 0$ , a za  $m = 0$ , parcijalni izvod funkcije po  $\theta$  nestaje u nuli ( $3G_{i,1} - 4G_{i,2} + 3G_{i,3} = 0$ ).

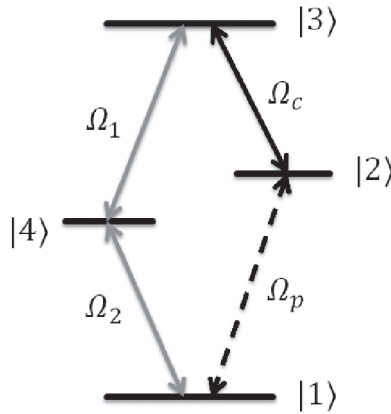
Kada se granični uslovi uključe u jednačinu (4), sistem linearnih jednačina može biti zapisan kao:

$$\Lambda G = E_m(n)G$$

gde je  $G$  matrica dimenzije  $n^2 \times 1$  koja sadrži vrednosti  $G_{i,j}$  za  $2 \leq i, j \leq n+1$  poređane jedna ispod druge.  $\Lambda$  je matrica dimenzije  $n^2 \times n^2$  napravljena tako da, kada se svaki red matrice  $\Lambda$  pomnoži sa matricom  $G$ , dobije se jednačina (4), sa određenim koeficijentima. Vrednosti energetskih nivoa i talasne funkcije koje se njima pripisuju nalaze se računanjem svojstvenih vrednosti i svojstvenih funkcija matrice  $\Lambda$ .

### 3. Master jednačina

Slično kao i u atomu, elektron u kvantnoj tački može imati samo određene energije, odnosno postoje energetska nivoa na kojima se on može nalaziti. Koristeći numeričku simulaciju opisanu u prethodnom delu, pronađene su vrednosti energija prvih nekoliko nivoa koji su od interesa za problem koji se razmatra. U zavisnosti od oblika talasne funkcije elektrona, svakom nivou se mogu pripisati odgovarajući glavni i sporedni kvantni broj (magnetni kvantni broj ulazi kao parametar u jednačinama simulacije). Između njih se izaberu nivoi koji će učestvovati u postizanju efekta laserovanja bez inverzije naseljenosti. Za postizanje efekta su dovoljna tri energetska nivoa, ali ovdje se posmatra sistem od četiri (slika 3). Prelazi elektrona između nekih nivoa su dozvoljeni, a između nekih zabranjeni, što je određeno selekcionim pravilima. U ovom radu se posmatra *diamond* konfiguracija: zabranjeni su prelazi između prvog i trećeg energetskeg nivoa i između drugog i četvrtog energetskeg nivoa, a svi ostali prelazi su dozvoljeni. Sistem je ozračen sa četiri lasera određenih energija. Laseri su označeni kao laser 1, laser 2, kontrolni laser i probni laser. Laseri 1, 2 i kontrolni služe za ‘pumpanje’ sistema, odnosno da dovedu sistem u stanje u kom je moguće pojačanje svetlosti probnog lasera.



Slika 3.  
Sistem od četiri energetska nivoa u *diamond* konfiguraciji

Figure 3.  
Four-level diamond system

Hamiltonijan datog sistema u interakciji sa laserima se može napisati kao (Zou 2013):

$$H = H_0 + H_I$$

$$H_0 = \Delta_p \sigma_{22} + (\Delta_1 + \Delta_2) \sigma_{33} + \Delta_2 \sigma_{44}$$

$$H_I = -\Omega_p \sigma_{21} - \Omega_c \sigma_{32} - \Omega_1 \sigma_{34} - \Omega_2 \sigma_{41} -$$

$$-\Omega_p^* \sigma_{12} - \Omega_c^* \sigma_{23} - \Omega_1^* \sigma_{43} - \Omega_2^* \sigma_{14}$$

U datim jednačinama  $\Delta_i$  ( $i = 1, 2, c, p$ ) predstavlja odstupanje frekvencije primenjenog polja od frekvencije datog prelaza:  $\Delta_1 = \omega_{34} - \omega_1$ ,  $\Delta_2 = \omega_{41} - \omega_2$ ,  $\Delta_c = \omega_{32} - \omega_c$ ,  $\Delta_p = \omega_{21} - \omega_p$ . Potrebno je da je za dva mo-

guća prelaza sa prvog na treći nivo suma odstupanja frekvencije ista, odnosno da važi  $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta_c + \Delta_p$ . Oznake  $\sigma_{ij}$  su operatori,  $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ ,  $i, j = 1, 2, c, p$ . Oznake  $\Omega_i$  predstavljaju Rabijeve frekvencije i u opštem slučaju su imaginarne vrednosti. Računaju se po formuli  $\Omega_i = \vec{d}_i \cdot \vec{E}_i / \hbar$ . U prethodnoj formuli  $E_i$  su jačine električnih polja datih lasera, a  $d_i$  je dipolni moment prelaza. Za prelazak elektrona sa nivoa  $|a\rangle$  na nivo  $|b\rangle$  dipolni moment se računa po formuli

$$d_{ab} = \langle \psi_a | er | \psi_b \rangle = e \int \psi_a^*(r) r \psi_b(r) d^3 r$$

gde su  $\psi_a$  i  $\psi_b$  talasne funkcije elektrona na nivoima  $|a\rangle$  i  $|b\rangle$ . Integrali se po celom prostoru, a pošto je uzeto da su talasne funkcije elektrona van kvantne tačke jednake nuli, dovoljno je integraliti samo po unutrašnjosti kvantne tačke. Pošto nije poznata analitička formula talasne funkcije, dati integral ne može da se izračuna, već se diskretizuje. To se radi tako što se računa vrednost funkcije koja se integrali samo u čvorovima mreže; te vrednosti se sabere i podele brojem čvorova mreže. To je urađeno za komponente dipolnog momenta duž  $x$ ,  $y$  i  $z$  ose, a ukupan dipolni moment je nađen kao zbir kvadrata modula komponenti.

Matrica gustine je matrica koja opisuje stanje kvantnog sistema. Pošto se dati sistem sastoji od četiri nivoa, matrica ima dimenzije  $4 \times 4$ . Dijagonalni elementi predstavljaju naseljenost određenog nivoa, odnosno verovatnoću da se elektron nađe na tom nivou. Zbog toga je suma dijagonalnih elemenata matrice jednaka 1. Elementi matrice koji su simetrični u odnosu na dijagonalu su kompleksno konjugovani. Realni deo nedijagonalnih elemenata određuje indeks prelamanja, a imaginarni deo apsorpciju (Rand 2010).

Ponašanje datog sistema se može opisati master jednačinom matrice gustine  $\rho$ :

$$\dot{\rho} = - [H, \rho] + L\rho \quad (5)$$

gde član  $L\rho$  opisuje uticaj efekata spontane emisije u sistemu. To je proces u kome se elektron sa višeg energetskog nivoa spontano deekscituje na niži i pri tom emituje foton proizvoljne polarizacije i faze i u proizvoljnom pravcu, pa dati fotoni ne doprinose pojačanju koherentne svetlosti.  $L\rho$  se računa po formuli:

$$L\rho = \sum \frac{\gamma_{ij}}{2} (2\sigma_{ij}\rho\sigma_{ji} - \sigma_{ji}\sigma_{ij}\rho - \rho\sigma_{ji}\sigma_{ij}), \quad ij = 12, 13, 23, 14, 24, 43$$

gde su  $\gamma_{ij}$  koeficijenti raspada sa nivoa  $|j\rangle$  na nivo  $|i\rangle$ .

Kompleksne Rabijeve frekvencije se mogu predstaviti kao  $\Omega_i = \Omega_i^0 e^{i\varphi_i}$ ,  $i = 1, 2, c, p$ , gde su  $\Omega_i^0$  jačine (moduli) Rabijevih frekvencija, koje zavise od jačina električnih polja  $E_i$  i dipolnih momenata  $d_i$ , a  $\varphi_i$  su faze.  $\Omega_i^0$  su realne vrednosti, dok se preko faza predstavlja odnos između realnog i imaginarnog dela Rabijeve frekvencije. Radi pojednostavljenja zapisa uvode se smene

$$\rho_{32} = \sigma_{32} e^{-i\varphi_c}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{34} &= \sigma_{34} e^{-i\varphi_1} \\
\rho_{21} &= \sigma_{21} e^{-i\varphi_p} \\
\rho_{41} &= \sigma_{41} e^{-i\varphi_2} \\
\rho_{31} &= \sigma_{31} e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\
\rho_{24} &= \sigma_{24} e^{-i(\varphi_1 - \varphi_c)} \\
\rho_{ii} &= \sigma_{ii}.
\end{aligned}$$

Nakon ubacivanja ovih smena u jednačinu (5), jednačine promene elemenata matrice  $\rho$  imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{11} &= \gamma_{12} \sigma_{22} + \gamma_{13} \sigma_{33} + \gamma_{14} \sigma_{44} + i\Omega_p^0 (\sigma_{21} - \sigma_{12}) - i\Omega_2^0 (\sigma_{14} - \sigma_{41}) \\
\dot{\sigma}_{22} &= -(\gamma_{12} + \gamma_{42}) \sigma_{22} + \gamma_{23} \sigma_{33} + i\Omega_p^0 (\sigma_{12} - \sigma_{21}) + i\Omega_c^0 (\sigma_{32} - \sigma_{23}) \\
\dot{\sigma}_{33} &= -(\gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_{43}) \sigma_{33} + i\Omega_c^0 (\sigma_{23} - \sigma_{32}) + i\Omega_1^0 (\sigma_{43} - \sigma_{34}) \\
\dot{\sigma}_{12} &= -\left( \frac{\gamma_{12} + \gamma_{42}}{2} - i\Delta_p \right) \sigma_{12} - i\Omega_p^0 (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + ie^{-i\varphi} (\Omega_2^0 \sigma_{42} - \Omega_c^0 \sigma_{13}) \\
\dot{\sigma}_{13} &= -\left( \frac{\gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_{43}}{2} - i(\Delta_1 + \Delta_2) \right) \sigma_{13} + i\Omega_2^0 \sigma_{43} - i\Omega_1^0 \sigma_{14} + \\
&\quad + ie^{i\varphi} (\Omega_p^0 \sigma_{23} - \Omega_c^0 \sigma_{12}) \\
\dot{\sigma}_{14} &= -\left( \frac{\gamma_{14}}{2} - i\Delta_2 \right) \sigma_{14} - i\Omega_2^0 (\sigma_{11} - \sigma_{44}) - i\Omega_1^0 \sigma_{13} + ie^{i\varphi} \Omega_p^0 \sigma_{24} \\
\dot{\sigma}_{23} &= -\left( \frac{\gamma_{12} + \gamma_{13} + \gamma_{23} + \gamma_{42} + \gamma_{43}}{2} - i\Delta_c \right) \sigma_{23} - i\Omega_1^0 \sigma_{24} - \\
&\quad - i\Omega_c^0 (\sigma_{22} - \sigma_{33}) + ie^{-i\varphi} \Omega_p^0 \sigma_{13} \\
\dot{\sigma}_{24} &= -\left( \frac{\gamma_{12} + \gamma_{14} + \gamma_{42}}{2} - i(\Delta_2 - \Delta_p) \right) \sigma_{24} + i\Omega_c^0 \sigma_{34} - i\Omega_1^0 \sigma_{23} - \\
&\quad - ie^{-i\varphi} (\Omega_2^0 \sigma_{21} - \Omega_p^0 \sigma_{14}) \\
\dot{\sigma}_{34} &= -\left( \frac{\gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{23} + \gamma_{43}}{2} + i\Delta_1 \right) \sigma_{34} - i\Omega_2^0 \sigma_{31} - \\
&\quad - i\Omega_1^0 (\sigma_{33} - \sigma_{44}) + i\Omega_c^0 \sigma_{24} \quad (6)
\end{aligned}$$

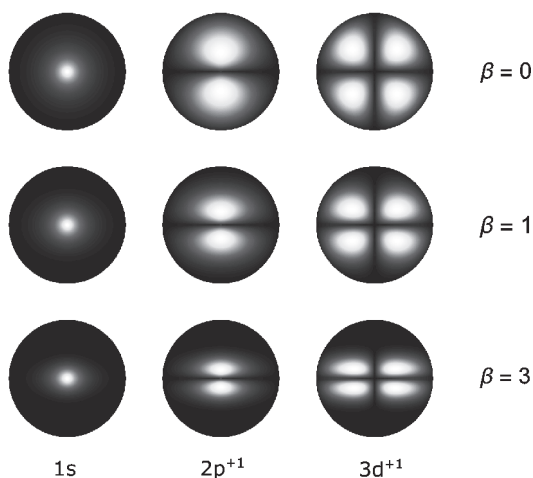
Pošto je sistem zatvoren ukupna populacija je konstantna, pa važi  $\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} + \sigma_{44} = 1$ . Ostali elementi matrice se mogu naći koristeći  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}^*$ . Može se primetiti da sistem ne zavisi od pojedinačnih faza Rabi-jevih frekvencija, već samo od relativne faze  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_c - \varphi_p$ . Traži se rešenje u kome je sistem u ravnoteži, pa je potrebno prve izvode po vremenu elemenata  $\rho$  izjednačiti sa nulom,  $\dot{\sigma}_{ij} = 0$ . Na taj način se dobijaju vrednosti svih elemenata matrice gustine.



## Rezultati i diskusija

Koristeći metod opisan u prva dva potpoglavlja prethodnog poglavlja, izračunate su vrednosti energija i talasnih funkcija elektrona u kvantnoj tački. Na slici 4 prikazani su izgledi nekih talasnih funkcija pri različitim vrednostima jačine magnetnog polja. Sva računanja su vršena za kvantnu tačku radijusa  $R = 5$ . Primećuje se da kada je magnetno polje isključeno, talasne funkcije imaju sličan oblik kao kod elektrona vezanih u atomu, i da se sa njegovim pojačanjem one menjaju.

Na slici 5 prikazane su razlike energija nekih nivoa i nivoa  $1s$ . Duž  $y$ -ose je pojačavano magnetno polje. Primećuje se da kada je  $\beta = 0$  među prikazanim nivoima postoji samo pet različitih vrednosti energija (postoji beskonačno nivoa, samo nisu svi prikazani). Kako se magnetno polje pojačava, nivoi se cepaju. Ovo je poznato kao Zemanov efekat.

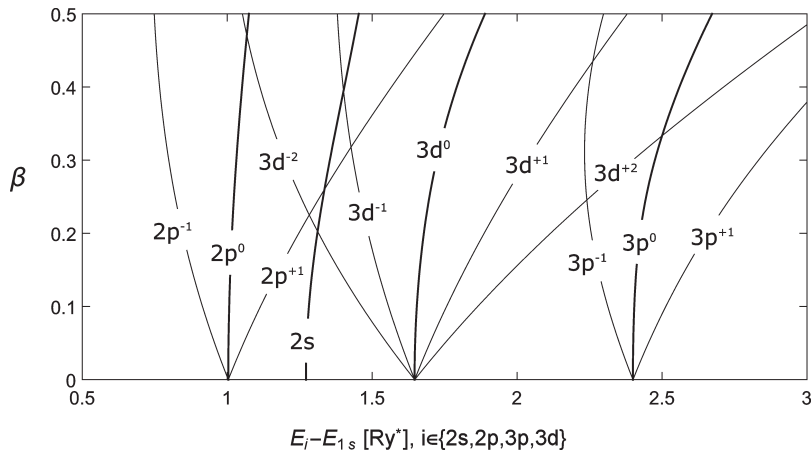


Slika 4.  
Talasne funkcije elektrona na nivoima  $1s$ ,  $2p^{+1}$  i  $3d^{+1}$

Figure 4.  
 $1s$ ,  $2p^{+1}$  and  $3d^{+1}$  electron wavefunctions

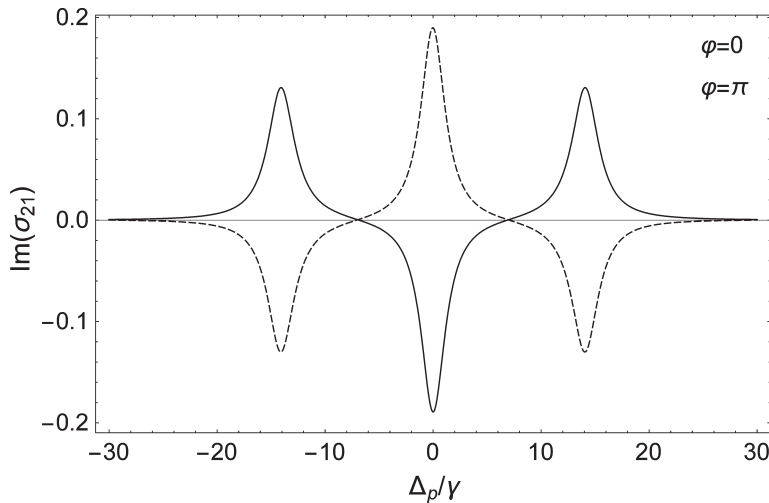
Prema postupku opisanom u trećem potpoglavlju prethodnog poglavlja moguće je naći matricu gustine, izjednačavajući jednačine (6) sa nulom. Radi jednostavnosti, uzeto je da je  $\Delta_1 = \Delta_c = 0$ . Sistem od četiri energetska nivoa je izabran na sledeći način:  $|1\rangle \equiv 1s$ ,  $|2\rangle \equiv 2p^0$ ,  $|3\rangle \equiv 2s$  i  $|4\rangle \equiv 2p^{-1}$ . Dati nivoi zadovoljavaju uslove diamond konfiguracije. Koeficijenti spontanog raspada u kvantnim tačkama variraju od  $10^9 \text{ s}^{-1}$  na veoma niskim temperaturama do  $10^{12} \text{ s}^{-1}$  na sobnoj temperaturi (Kaer Nielsen 2007). U ovom radu je uzeto da su svi koeficijenti spontanog raspada konstantni i jednaki  $\gamma_i = \gamma = 10^{10} \text{ s}^{-1}$ ,  $i = 12, 13, 14, 23, 42, 43$ . Moduli Rabijevih frekvencija su sledeći:  $\Omega_1^0 = 10\gamma$ ,  $\Omega_2^0 = \gamma$ ,  $\Omega_c^0 = 10\gamma$ ,  $\Omega_p^0 = 0.05\gamma$ .

Iz elemenata matrice gustine, moguće je odrediti osnovne karakteristike stanja sistema – apsorpciju, indeks prelamanja svetlosti i naseljenost nivoa. U ovom slučaju, gde se posmatra ponašanje probne laserske svetlosti, apsorpcija je data sa  $\text{Im}(\sigma_{21})$ . Ako je apsorpcija negativna, to znači da je došlo do pojačanja laserske svetlosti.



Slika 5.  
Razlika energija između nivoa  $1s$  i drugih nivoa ( $2s$ ,  $2p$ ,  $3p$ ,  $3d$ ) pri variranju magnetnog polja

Figure 5.  
Energy difference between level  $1s$  and other levels ( $2s$ ,  $2p$ ,  $3p$ ,  $3d$ ) versus magnetic field strength

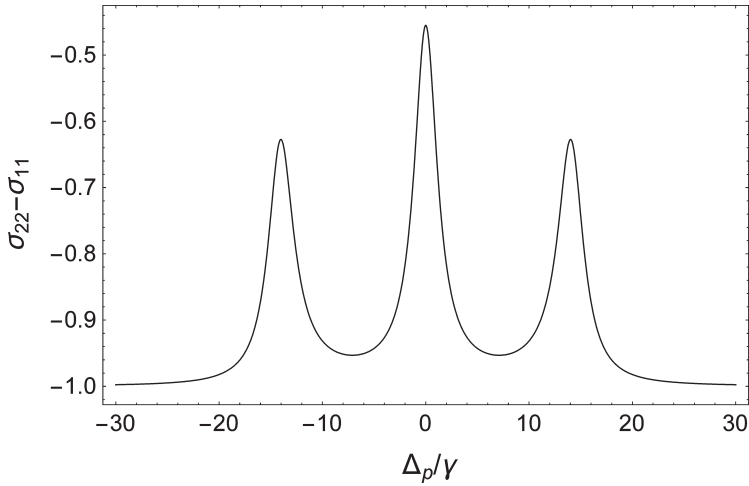


Slika 6.  
Apsorpcija probnog lasera pri variranju odstupanja frekvencije lasera od frekvencije prelaza između nivoa  $|2\rangle$  i nivoa  $|1\rangle$ . Punom linijom je prikazan rezultat kada je relativna faza  $\varphi = 0$ , a isprekidanom  $\varphi = \pi$ .

Figure 6.  
Probe light absorption versus probe detuning, for  $\varphi = 0$  (solid line) and  $\varphi = \pi$  (dashed line)

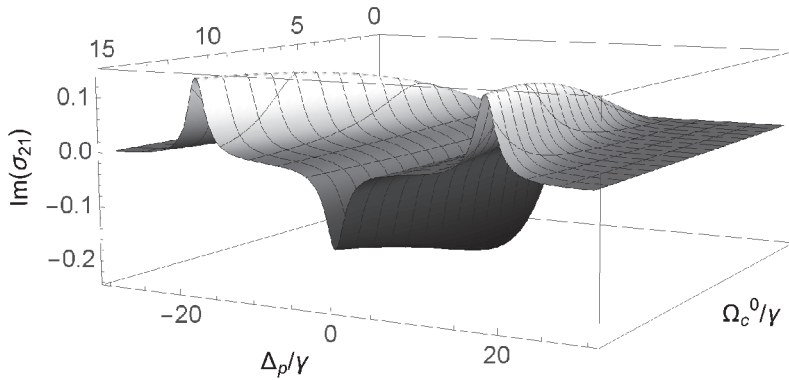
Na slici 6 prikazana je zavisnost apsorpcije svetlosti probnog lasera od njegove frekvencije, odnosno od odstupanja frekvencije od rezonantne. Punom linijom je prikazan rezultat pri relativnoj fazi 0, a isprekidanom kada je relativna faza  $\pi$ . Primećeno je da, kada je faza jednaka nuli, do najvećeg pojačanja svetlosti dolazi pri rezonantnoj frekvenciji, odnosno kada je frekvencija lasera jednaka frekvenciji prelaza između dva nivoa. Takođe se primećuju dva apsorpciona pika na jednakom rastojanju od rezonantne frekvencije. Pri prelasku faze od 0 do  $\pi$  zone apsorpcije i pojačanja se razmenjuju. Iz toga sledi da je u istom sistemu moguće dobiti pojačanje svetlosti više različitih frekvencija.

Na slici 7 prikazana je razlika naseljenosti drugog i prvog nivoa. Može se primetiti da je ta razlika pri variranju frekvencije lasera uvek negativna, odnosno da je naseljenost na prvom nivou uvek veća od naseljenosti na drugom nivou. To pokazuje da efekat pojačanja lasera ne potiče od inverzije naseljenosti, kao što je slučaj kod klasičnih lasera.



Slika 7.  
Razlika naseljenosti između nivoa  $|2\rangle$  i nivoa  $|1\rangle$  pri variranju odstupanja frekvencije lasera,  $\varphi = 0$

Figure 7.  
Population difference between levels  $|2\rangle$  and  $|1\rangle$  versus probe detuning, for  $\varphi = 0$



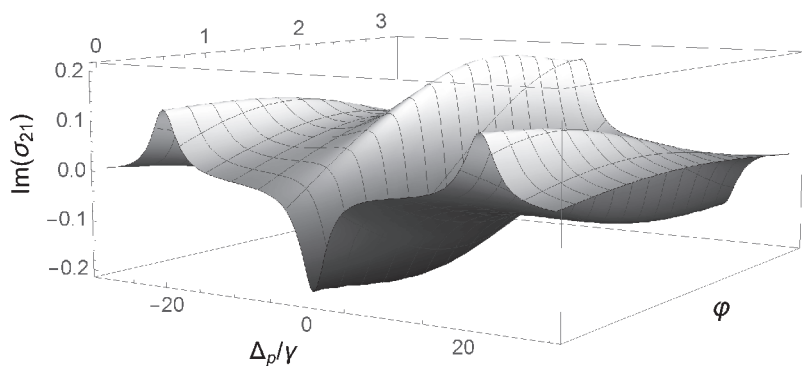
Slika 8.  
Apsorpcija probnog lasera pri variranju njegove frekvencije i jačine polja kontrolnog lasera. Jačine polja ostalih lasera su konstantne. Uzeto je da je faza jednaka nuli.

Figure 8.  
Probe light absorption versus probe detuning and coupling field strength. Strengths of other fields are constant, and relative phase is  $\varphi = 0$ .

Podešavanjem jačina lasera koji se koriste moguće je postići veće pojačanje probnog lasera. Na slici 8 je prikazana zavisnost apsorpcije pri variranju jačine kontrolnog lasera dok se ostale jačine lasera drže konstantnim. Prikazan je slučaj kada je faza jednaka nuli. Može se uočiti da je pri određenoj jačini polja kontrolnog lasera pojačanje najveće i da ono takođe nastaje pri rezonantnoj frekvenciji probnog lasera. Ista zavisnost se može dobiti pri variranju jačine ostalih lasera i na taj način se može odrediti optimalna jačina svakog lasera, pri kom je pojačanje najveće.

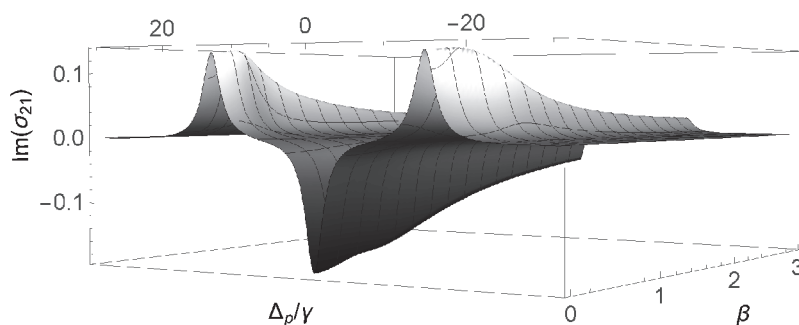
Na slici 9 prikazana je apsorpcija pri variranju faze od  $0$  do  $\pi$ , dok su ostali parametri bili konstantni. Uočava se kako apsorpcioni minimumi postepeno prelaze u maksimume i obrnuto. Pri tom prelazu, menjaju se frekvencije na kojima se oni nalaze. Najveće pojačanje se postiže pri određenoj nenuljoj relativnoj fazi i malom odstupanju laserske svetlosti od rezonantne.

U prethodnim primerima varirani su samo parametri spoljašnjih lasera, nije bio bitan izbor pojedinih nivoa u kvantnoj tački, pošto su svi koefici-



Slika 9.  
Apsorpcija probnog lasera pri variranju njegove frekvencije i relativne faze

Figure 9.  
Probe light absorption versus probe detuning and relative phase



Slika 10.  
Apsorpcija probnog lasera pri variranju njegove frekvencije i jačine magnetnog polja

Figure 10.  
Probe light absorption versus probe detuning and magnetic field strength

jenti spontanog raspada postavljeni da budu konstantni. Još jedna varijabla koja može da se varira je magnetno polje. Ono utiče na energije nivoa i oblike talasnih funkcija elektrona u kvantnoj tački. Promenom talasnih funkcija dolazi do promene dipolnog momenta prelaza, a samim tim i Rabi-jevih frekvencija. Dakle, menjanjem magnetnog polja pri istim karakteristikama lasera, dobijamo različite rezultate. Na slici 10 prikazana je apsorpcija pri promeni jačine magnetnog polja. Uočljivo je da je pojačanje laserske svetlosti najveće kada je jačina polja nula, odnosno kada magnetno polje nije prisutno.

## Zaključak

U ovom radu je ispitivan efekat laserovanja bez inverzije naseljenosti na sistemu kvantne tačke. Posmatrano je kako se pojačanje lasera menja pri variranju različitih parametara sistema. Varirani su parametri od kojih zavise karakteristike sistema kvantne tačke i rasporeda elektrona u njoj, kao i parametri od kojih zavise karakteristike lasera koji deluju na taj sistem. Vrednosti samih nivoa i talasnih funkcija elektrona koji se nalaze na ovim nivoima su određene numeričkom metodom. Efekat je posmatran na konkretnom sistemu energetskih nivoa koji se nalaze u *diamond* konfiguraciji.

Kao nastavak istraživanja na ovu temu, može se posmatrati kako se menja pojačanje lasera ako je sistem, umesto u magnetno, postavljen u homogeno električno polje. Takođe, moguće je izabrati nivoe u drugačijoj konfiguraciji, kao što su N, Y ili *cascade* konfiguracija.

**Zahvalnost.** Želela bih da se zahvalim svom mentoru, Vladanu Pavloviću, na ideji za projekat, korisnim sugestijama i nesebičnoj pomoći pri izradi ovog rada. Takođe se zahvaljujem Milanu Krstajiću, kao i ostalim saradnicima seminarara fizike u IS Petnica.

---

## Literatura

- Kaer Nielsen P., Thyrestrup H., Mork J., Tromborg B. 2007. Numerical investigation of electromagnetically induced transparency in a quantum dot structure. *Optics Express*, **15** (10): 6396.
- Rand C. S. 2010. *Nonlinear and Quantum Optics using the Density Matrix*. Oxford University Press
- Scully M. O., Zubairy M. S. 1997. *Quantum Optics*. Cambridge University Press
- De Souza G. V. B., Bruno-Alfonso A. 2014. Finite-difference calculation of donor energy levels in a spherical quantum dot subject to a magnetic field. *Physica E*, **66**: 128.
- Zou J., Xu D., Zhang H. 2013. Amplitude and phase control of gain without inversion in a four-level atomic system using loop-transition. arXiv:1210.5817 [physics.optics]

---

*Marija Šindik*

## Lasing Without Inversion in Quantum Dots

In this paper the effect of lasing without inversion in a quantum dot structure is investigated. A spherical quantum dot with impurity in the center and subject to a homogeneous magnetic field is considered. Energy levels and electron wavefunctions are calculated using the finite-difference method. Four levels in a diamond configuration are chosen. Four coherent driving fields with certain frequencies are applied to the system and the gain of one of the lasers is observed. The dependency of the amplification of the laser light on the variation of different parameters, like frequencies of lasers, relative phase and strength of applied coherent and magnetic fields, is analyzed. The optimal combination for obtaining a maximum gain of laser light is discussed.

