Ivana Stojiljković

Konstrukcija optičkog sistema upotrebom genetskog algoritma

Cilj ovog rada je konstrukcija optičkog sistema koji bi bio pogodan za korišćenje kao objektiv u kameri ili u fotoaparatu. Objektiv koji je konstruisan ne poseduje zum tj. ima fiksnu žižnu daljinu. Algoritam koji je izprojektovan funkcioniše tako što za zadatu žižnu daljinu pronalazi raspored i karakteristike sočiva koja sačinjavaju optički sistem sa žižnom daljinom približnom zadatoj i minimalnom sfernom aberacijom. Za simuliranje optičkog sistema korišćen je matrični pristup geometriskoj optici. Sistem sa najboljim karakteristikama je dobijen upotrebom genetskog algoritma. Kao rezultat dobijeni su objektivi koji su sačinjeni od dva ili tri sočiva čija se žižna daljina razlikuje za manje od 0.01% od zadate i kod kojih je sferna aberacija minimalizovana, što znači da je istog reda veličine kao i kod već postojećih objektiva. To nas dovodi do zaključka da su rezultati dobijeni ovim metodom upotrebljivi u komercijalnoj proizvodnji.

Uvod

Glavni cilj ovog rada je konstrukcija optičkog sistema sa takvim karakteristikama da se može iskoristiti kao objektiv u kameri ili fotoaparatu. Da bismo došli do najboljeg sistema korišćen je genetski algoritam. Nije pronađen ni jedan rad koji se bavi konstrukcijom objektiva na ovaj način zbog čega je ideja bila da se ispita da li taj pristup može dovesti do rezultata koje je moguće iskoristiti u konstrukciji komercijalnih optičkih sistema.

Optički sistem (slika 1) je sačinjen od sočiva. Kardinalni elementi optičkog sistema su prednja i zadnja žiža i prednja i zadnja glavna ravan. Prednja žiža jeste tačka F čiji se lik formira u beskonačnosti, dok je zadnja žiža tačka F', u kojoj se seku zraci koji dolaze iz beskonačnosti. Glavne ravni su ravni koje se preslikavaju jedna u drugu sa uvećanjem 1. Prednja glavna ravan (H) je ona koja pripada prostoru predmeta (P), a zadnja glavna ravan (H') ona koja pripada prostoru lika (L). Optička osa z je orijentisana sa leva na desno. Prednja žižna daljina (f) je rastojanje od prednje glavne ravni do prednje žiže, a zadnja žižna daljina (f') rastojanje od zadnje glavne ravni do zadnje žiže. Rastojanje prednje glavne ravni od početne tačke sistema označava se sa l_{μ} , dok se sa l'_{H} , označava rastojanje zadnje glavne ravni od poslednje tačke sistema.



Slika 1. Optički sistem – P je predmat, L lik, H i H' prednja i zadnja glavna ravan, a l_{H} i l'_{H} , njihova rastojanja od početka i kraja sistema, F i F' su žiže, a f i f' prednja i zadnja žižna daljina.

Figure 1. Optical system -P is object, *L* is image, *H* i *H'* front and last main plane, l_{H} and l_{H} their distances from the beginning and the end of the system, *F* and *F'* are focus and *f* and *f'* front and last focal length.

Ivana Stojiljković (1997) Beograd, Kamčatska 29, učenica 4. razreda Matematičke gimnazije u Beogradu

MENTORI:

Marko Kuzmanović, student Fizičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Danijel Silađi, student UP Famnit

Aleksandar Bukva, student Fizičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu Kod sočiva kod kojih debljina nije zanemarljiva i menja se sa rastojanjem od optičke ose, zraci koji se nalaze na različitim rastojanjima od optičke ose (pre ulaska u optički sistem) se ne seku u istoj tački (slika 2). To dovodi do toga da je lik koji se stvara zamućen. Pojava tog zamućenja naziva se sferna aberacija. U realnosti nije mouće proizvesti beskonačno tanko sočivo kod kojeg je sferna aberacija zanemarljiva. Zbog toga je važno da se optički sistem konstruiše tako da je ova pojava što manja kako bi kvalitet slike bio bolji.



Slika 2. Sferna aberacija

Figure 2. Spherical aberration

Objektiv koji se nalazi u kameri je sistem sočiva tj. optički sistem. Postoje dve vrste objektiva – oni koji imaju fiksnu žižnu daljinu i, pod nazivom zum, objektivi koji mogu uzeti bilo koju žinu daljinu iz određenog opsega. Objektivi sa fiksnom žižnom daljinom obezbeđuju bolji kvalitet slike. To se dešava zbog toga što zum objektivi, kako bi ostvarili različite žižne daljine, poseduju veći broj sočiva te je mnogo teže minimalizovati sve aberacije, a pritom ne načiniti objektiv previše teškim ili glomaznim. Što se tiče prednosti objektiva sa zumom, oni omogućavaju veću fleksibilnost u pogledu predmeta koji se posmatra. Ipak, u ovom radu je konstruisan objektiv sa fiksnom žižnom daljinom.

Napomenuto je da se u našem radu do traženog objektiva dolazi upotrebom genetskog algoritma. Ideja po kojoj radi ovaj algoritam je proistekla direktno iz Darvinove teorije evolucije i zasnovana je na opštepoznatom principu prirodne selekcije. U svakoj novoj generaciji neke populacije opstaju one sa genetskim materijalom koji olakšava opstanak jedinke, tj. one "najbolje" po određenom kriterijumu. Očevidno je da ovakva populacija evoluira ka sve boljim jedinkama, jer svaka naredna generacija nastaje ukrštanjem "najboljih" jedinki. Takođe dolazi i do mutacija, tj. malih promena kod određenog broja jedinki, koje sprečavaju stagniranje napretka populacije. O tome kako je ovaj algoritam prilagođen problemu kojim se bavi ovaj projekat biće reči naknadno.

Kao što je već pomenuto cilj ovog rada je konstrukcija optičkog sistema sa fiksnom žižnom daljinom koji ima minimalnu sfernu aberaciju, najekonomičniji je i najmanje menja žižnu daljinu pri malim promenama u sistemu. Ekonomičnost sistema se ogleda u jednostavnosti njegovog konstruisanja u realnoj situaciji (kao na primer broj sočiva, dostupnost materijala od kojeg su sočiva napravljena itd). Povećanje ekonomičnosti se svodi na smanjivanje elemenata u sistemu. U praksi je nemoguće konstruisati sistem sa parametrima koji su dobijeni algoritmom bez ikakve greške pri izradi. Zbog toga je uvedena veličina koja govori koliko se promene karakteristike sistema (u ovom slučaju žižna daljina) pri maloj promeni parametara. Ova veličina će se u daljem tekstu nazivati inertnost. Kako bi sistem bio što optimalniji potrebno je da inertnost teži nuli.

Metod

Za simulaciju optičkog sistema korišćen je matrični pristup geometriskoj optici (Nedeljković 2009). Ovakav pristu se može koristiti jedino ukoliko važi paraksijalna aproksimacija (Spasojević 2015). To znači da je rastojanje zraka od optičke ose znatno manje od polurečnika svih sočiva u sistemu, kao i da je ugao između svakog dela zraka i optičke ose mali. Tada se zrak koji prolazi kroz optički sistem u svakom trenutku može opisati vektorom:

koji se naziva *stanje zraka* i gde *y* predstavlja rastojanje zraka od optičke ose sistema, a α ugao

koji zrak zaklapa sa optičkom osom. Optički sistem se može predstaviti matricom:

$$S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gde parametri *a*, *b*, *c*, i *d* opisuju promene koje se dešavaju na parametrima zraka pri prolasku kroz optički sistem.

Nakon čega se stanje zraka posle prolaska kroz optički sistem dobija kao proizvod matrice sistema i stanja neposredno pre ulaska u optički sistem:

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

Matrica prelamanja kojom se predstavlja prelamanje zraka na sfernoj površini radijusa r, pri prelasku iz sredine ideksa prelamanja n_1 u sredinu indeksa prelamanja n_2 ima oblik:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{k}{n_2} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix}, \ k = \frac{n_2 - n_1}{r}$$

Matrica prelaska opisuje prostiranje zraka kroz prostor konstantnog indeksa prelamanja *n*. Za pređeni put zraka čija je projekcija na optičku osu jednaka *d* ova matrica je data kao:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalje, sočivo možemo predstaviti matricom *S* koja se dobija kao proizvod matrice R_1 koja opisuje prelamanje zraka na površini sočiva na koju zrak prvo nailazi, *T* koja opisuje prolazak zraka kroz sočivo i R_2 koja opisuje prelamanje zraka na drugoj površini sočiva, tj. $S = R_1TR_2$.

Na kraju se dobija da se ceo optički sistem simulira proizvodom matrica za svako pojedinačno sočivo u sistemu i matrica koje oipsuju putovanje zraka između dva sočiva. Kao krajnja matrica koja opisuje ceo optički sistem sačinjenog od n sočiva dobija se:

$$M = S_1 T_1 S_2 T_2 \dots S_i T_i \dots T_{n-1} S_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Zadnja žižna daljina ovog sistema se izračunava po formuli $f' = -\frac{1}{c}$, a položaj zadnje glavne ravni $l'_{H} = \frac{a-1}{c}$. Krajnji položaj zraka, nakon izlaska iz optičkog sistema dobija se kao proizvod početnog stanja zraka (pre ulaska u optički sisitem) sa matricom sistema. Zbog toga je optički sistem predstavljen kao niz matrica gde matrice predstavljaju sočivo (*S*) ili prostor između dva sočiva (*T*).

Način računanja i predstavljanja optičkog sistema ne uzima u obzir nepravilnosti do kojih dolazi pri prelamanju svetlosti u realnim situacijama. Kako bi se uračunali i neki od tih efekata, kao što je sferna aberacija, matrica sistema se menja. U slučaju sferne aberacije (Moreno *et al.* 2014) umesto 2×2 matrica su korišćene 3×3 matrice prelamanja koje imaju oblik:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ c & d & \Delta \sigma \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 $gde \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ predstavlja 2×2 matricu prelamanja,

a $\Delta\sigma$ odstupanje ugla σ od predviđenog kada se zrak neposredno pre prelaska kroz optički sistem nalazi na x rastojanju od optičke ose i računa se po formuli:

$$\Delta \sigma = -\frac{n^2(n_1 - n)}{2n_1^3 r^3} x^3$$

gde je *n* indeks prelamanja sredine iz koje zrak dolazi, n_1 indeks prelamanja sredine u koju zrak ulazi i *r* radijus krive na kojoj se svetlost prelama. Vrednosti žižne daljine i glavne ravni se računaju po istoj formuli kao i pri predstavljanju pomoću 2×2 matrica.

Na početku genetskog algoritma je potrebno definisati šta predstavlja jedinku u sistemu. To je sistem sočiva koji se simulira na gore objašnjen način. Kod konstrukcije jedinke se mora obratiti pažnja na to da je rastojanje zadnje glavne ravni do poslednje tačke optičkog sistema manje od zadnje žižne daljine. O ovome se vodi računa zbog toga što se zastor na kome se formira lik koji se poklapa sa žižom, mora nalaziti nakon optičkog sistema.

Sledeći korak u algoritmu jeste formiranje početne populacije koju sačinjavaju jedinke. Parametri koji su varirani pri konstrukciji jedinki u generaciji su poluprečnik, indeks prelamanja i debljina sočiva, njihov broj i rastojanje među njima. Broj sočiva je ograničen sa 5 radi lakšeg konstruisanja ovakvog sistema. Za poluprečnike sočiva je uzet opseg od –1000 mm do 1000 mm. Debljina sočiva uzima vrednosti do 20 mm, rastojanje među sočivima do 30mm, dok je dužina celog sistema po optičkoj osi ograničena na 200 mm takođe radi prilagođavanja simulacije realnim situaijama. Indeksi prelamanja se nalaze u intervalu (1.3, 1.7), jer se indeksi prelamanja stakla kreću u tom intervalu. U jednoj generaciji se generiše 50 jedinki.

Dalje, treba izabrati fitnes funkciju koja daje vrednost za svaku jedinku tj. optički sistem pomoću koje se optički sistemi sortiraju od onog koji je najbliži traženom do onog koji je najdalji. Optički sistem je najbliži traženom ukoliko mu je žižna daljina najsličnija zadatoj, ukoliko je sferna aberacija najmanja, ukoliko je najekonomičniji i ukoliko je inertnost sistema najveća. Blizina žižne daljine traženoj se računa kao $\Delta f = |f - f_0|$ gde je f žižna daljina sistema a f_0 tražena žižna daljina. Odstupanje ugla pod kojim se kreće zrak u odnosu na idealnu situaciju zbog sferne abaracije označava se sa $\Delta \sigma$ i računa se tako što se posmatra zrak koji se pri ulazu u sistem nalazi na x = 20 mm od optičke ose. Uzima se ova vrednost zbog toga što je prosečan radijus zatvarača na kamerama približno jednak ovoj vrednosti pa se ni jedan zrak ne može naći na većem rastojanju od optičke ose. Traženi parametar se dobija kao apsolutna vrednost vrednosti koja se nalazi u drugom redu i trećoj koloni konačne matrice sistema za ovaj probni zrak. Kao što je rečeno ekonomičnost sistema se svodi na broj elemenata (br). Inertnost sistema p se dobija kao maksimalna promena žižne daljine pri pomeranju jednog elementa. Ne razmatra se pomeranje više elemenata odjednom zato što je pomeranje jednog elementa koje se vrši u programu mnogo veće od onog koje se dešava u realnim situacijama pa se u tu grešku može uvrstiti i greška za mala pomeranja više elemenata. Zbirna fitnes funkcija izgleda:

fit =
$$A | f - f_0 | + B\Delta \sigma + C \cdot br + Dp$$

gde su A, B, C, D težišni koeficijenti. Koeficijenti su varirani nakon čega je zaključeno da se najbolje rešenje za karakteristike koje se traže u ovom radu dobija za vrednosti A = 10, B = 1000, C = 0.2, D = 1. Najbolji optički sistem jeste onaj čija je fitnes funkcija najmanja.

Nakon generisanja početne populacije optičkih sistema vrši se određeni broj iteracija (u ovom radu vršeno je 1000 iteracija), gde se u svakoj iteraciji izvršava sortiranje po fitnes funkciji, ukrštanje i mutacije. Ukrštanje se vrši tako što se zadržava bolja polovina jedinki (25 jedinki), a umesto druge polovine se konstruišu novih 25 jedinki ukrštanjem nekih jedinki koje su zadržane. Nova jedinka se dobija tako što se izaberu dve proizvoljne jedinke iz bolje polovine, obe se podele na po dva proizvolina dela, tj. na po dva proizvoljna niza matrica, i na kraju se spoje prvi deo prve jedinke i drugi deo druge jedinke. Pri spajanju se vodi računa oko toga da se u novonastalom nizu naizmenično pojavljuju matrice S i T, ukoliko to nije slučaj druga jedinka se prekine na nekom drugom mestu dok se ne ispuni traženi uslov. Takođe je važno da novonastala jedinka ne poseduje veći broj sočiva od prethodno određenog maksimalnog broja sočiva (5 sočiva).

Kada je završeno ukrštanje u svakoj iteraciji se vrši određeni broj mutacija (4 u ovom radu) što znači da se vrše promene na određenom broju proizvoljnih jedinki. Nakon izbora jedinke na kojoj se vrši mutacija obavlja se izbor matrice u jedinki koja mutira. Ukoliko je izabrana matrica T, razmak između dva sočiva se povećava ili smanjuje za 5%. U suprotnom svaki od parametara sočiva se varira za 5%.

Rezultati i diskusija

Nakon pokretanja genetskog algoritma za žižnu daljinu od 85 mm dobija se optički sistem koji je prikazan na slici 3, gde je na y-osi prikazano rastojanje od optičke ose u milimetrima, a na x-osi rastojanje između dva sočiva kao i debljina sočiva u milimetrima. Na slici prve dve linije predstavljaju prvo sočivo, druge dve drugo, a poslednje dve treće. Može se videti da se ovaj sistem sastoji od tri sočiva, od kojih je prvo rasipno a druga dva sabirna. Putanje zraka kroz ovaj objektiv su prikazane na slici 4. Žižna daljina ovog sistema je f = 85.0035 mm, odstupanje zbog sferne aberaije $\Delta \sigma = -0.003$ i inertnost p = 1.54 mm.

Nađen je još jedan optički sistem za istu žižnu daljinu, tj. 85 mm. On je prikazan na slici 5.



Slika 3. Prvi optički sistem žižne daljine 85 mm

Figure 3. The first optical system with focal length 85 mm



Slika 4. Putanje zraka kroz prvi objektiv žižne daljine 85 mm

Figure 4. Trajectory of rays trough the first lens with focal length 85 mm

Kao što se vidi na grafiku, ovaj sistem takođe sadrži tri sočiva od kojih je prvo rasipno, a druga dva sabirna. Žižna daljina ovog sistema je f == 85.005 mm, odstupanje zbog sferne aberacije $\Delta \sigma = 0.0023$ i inertnost p = 1.72 mm. Putanje zraka kroz ovaj optički sistem su prikazane na slici 4.

Može se primetiti da se smanjivanjem odstupanja žižne daljine zbog sferne aberacije $\Delta \sigma$



Slika 5. Drugi optički sistem žižne daljine 85 mm

Figure 5. The second optical system with focal length $85\ \mathrm{mm}$



Slika 6. Putanje zraka kroz drugi objektiv žižne daljine 85 mm

Figure 6. Trajectory of rays trough the second lens with focal length 85 mm

 $\Delta\sigma$ povećava inertnost sistema *p*. Fitnes funkcija je konstruisana tako da $\Delta\sigma$ poseduje veću težinu od inertnosti, tj. smanjenje $\Delta\sigma$ ima veći doprinos smanjenju fitnes funkcije, nego smanjivanje *p*. Razlog za ovakvo postupanje je taj što se inertnost računa kao najveće moguće odstupanje od žižne daljine usled pomeranja proizvoljng sočiva. U algortmu su, pri implementaciji, odstupanja od teorijskih vrednosti veća od onih koja su verovatna u realnim situacijama, zbog čega se dobijaju veća odstupanja žižne daljine od realnih, pri izradi ovakvog sistema.

Dakle, nakon svakog novog pokretanja algoritma dobija se različit optički sistem. U najvećem broju slučajeva sistem sadrži tri sočiva, dok se u malobrojnim sljučajevima desilo da krajnji sistem ima dva sočiva. Sistem uvek sadrži i sabirna i rasipna sočiva, što se poklapa sa ciljem da se smanji sferna aberacija. To takođe i objašnjava zbog čega se nikada ne dobija sistem od jednog sočiva. U komercijalnim sistemima broj sočiva je veći od tri, što se objašnjava time da je u ovom algoritmu minimalizovana jedino sferna aberacija, dok se u komercijalnim sistemima vodi računa i o ostalim nepravilnostima do kojih dolazi pri prelamanju zraka svetla.

Putanje zraka kroz sistem koji je dobijen za žižnu daljinu 200 mm je prikazan na slici 7. Na grafiku se primećuje da je rastojanje između zadnje glavne ravni i žiže približno jednako 200 mm kao i da se žiža ne nalazi unutar optičkog sistema što i jesu bili neki od neophodnih uslova pri konstrukciji sistema. On se sastoji od tri sočiva od kojih su prvo i treće sabirna a drugo rasipno. Njegova tačna žižna daljina je f =



Slika 7. Prolazak zraka kroz optički sistem žižne daljine 200 mm (PS – početak optičkog sistema, KS – kraj optičkog sistema, ZG – zadnja glavna ravan)

= 199.997 mm, $\Delta \sigma$ = -0.0023, a inertnost *p* = = 0.58 mm.

Za žižnu daljinu od 45 mm dobijen je optički sistem koji ima tačnu žižnu daljinu f = 44.998 mm, odstupanje zbog sferne aberacije $\Delta \sigma = -0.0017$ i inertnost na promene p = 1.1 mm. Prolazak zraka svetlosti kroz ovaj optički sistem je prikazan na slici 8. I na ovom grafiku se može uočiti raspored zadnje glavne ravni optičkog sistema, kraja sistema i žiže i doći do zaključka da su nametnuti uslovi isunjeni.



Slika 8. Putanje zraka kroz optički sistem žižne daljine 45 mm (PS – početak optičkog sistema, KS – kraj optičkog sistema, ZG – zadnja glavna ravan)

Figure 8. Trajectory of rays trough lens with focal length 45 mm (PS – the beginning of the optical system, KS – the end of the optical system, ZG – rear principal plane)

Preko ugla $\Delta \sigma$ za koji se kretanje zraka razlikuje od idealnog slučaja zbog sferne aberacije je izračunato odstupanje žižne daljine od tražene prouzrokovano istim. Za optički sistem žižne daljine približne 200 mm prikazan na slici 7 je dobijeno odstupanje od 82 µm. Odstupanja za ostale pronađene sisteme su manja od malopre navedenog i veća od 20 µm. Za komercijalne objektive koji se koriste u kamerama, ova nesavršenost se kreće oko 100 µm. Možemo zaključiti da ovakav model daje dobre rezultate za smanjivanje sferne aberacije. Ipak, u modelu nije uračunata ni jedna druga aberacija, što je razlog zbog kojeg se dobijaju sistemi naizgled savršeniji od već postojećih koji minimalizuju mnogo više nesavršenosti.

Figure 7. Trajectory of rays trough lens with focal length 200 mm (PS – the beginning of the optical system, KS – the end of the optical system, ZG – rear principal plane)

Zaključak

Iako dobijeni sistemi zadovoljavaju uslove koji su nametnuti, najbolja verifikaija rezultata bila bi konstrukcija dobijenog sistema u laboratoriskim uslovima i provera podataka koji su dobijeni simulacijom. To nije urađeno zbog velikog broja varijacija oblika i indeksa prelamanja sočiva koji sačinjavaju sistem i nemogućnosti da se do takvih sočiva dođe.

Optički sistemi dobijeni na ovakav način teorijski bi se mogli upotrebiti kao objektivi u određenim apartima kao što je kamera, mikroskop ili teleskop. To nas dovodi do zaključka da ovakav metod konstrukije optičkih sistema daje rešenja koja se mogu iskoristiti u realnim situaijama. Ipak potrebno je nadograditi algoritam kako bi se kvalitet slike dobijene nakon prolaska zraka kroz sočivo dodatno uvećao. Radi poboljšanja algoritma mogla bi se razmatrati još neka nepravilnost do koje dolazi pri prelamanju svetlosti kao što je hromatska aberacija.

Zahvalnost. Veliku zahvalnost dugujem svojim mentorima Marku Kuzmanoviću, Danijelu Silađiju i Aleksandru Bukvi koji su mi pomogli u definisanju teme projekta kao i radu na njemu. Takođe se zahvaljujem i ostalim saradnicima sa seminara fizike na pomoći oko završavanja ovog rada.

Literatura

Moreno I., Carcia-Martinez P., Ferreira C. 2014. Using ray matrices to derive analytical expressions of optical aberration. *Proceedings of Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE)*, **9289**, 12th Education and Training in Optics and *Photonics Conference*, 92890G. Nedeljković N. 2009. *Talasi i otika*. Beograd: Univerzitet u Beogradu, Fizički fakultet

Spasojević Đ. 2015. *Matrični pristup u geometriskoj* optici. Univerzitet u Beogradu – Fizički fakultet, Beograd

Ivana Stojiljković

Construction of the Optical System Using a Genetic Algorithm

The aim of this project is to construct an optical system which would be suitable for use as an objective in a camera. The objective constructed in this way would not have a zoom, i.e. it would have a fixed focal length. The developed algorithm functions in such a way that it constructs an optical system with the focal length approximate to the one provided by the user, with minimal spherical aberration, and determines the positions and characteristics of all the lenses of which the system consists. The matrix method in geometrical optics was used in order to simulate an optical system, and the system with the best characteristics was constructed using a genetic algorithm. The systems obtained as results consisted of two or three lenses, their focal lengths were within 0.01% of the given value, and the spherical aberration was minimized, meaning it was the same order of magnitude as the one present in manufactured objectives. This leads to the conclusion that the results obtained through this method are indeed applicable to real-world situations.