Теоријска механика

приредио Јован Марков
контакт: jocin.meil@gmail.com

17. април 2019.

Физика 2, пролећни семинар,
Истраживачка станица Петница

1 Теорија

1.1 Генералисане координате

Један од основних појмова у класичној механици је честица, односно материјална тачка. Под овим се мисли на тело чије су физичке димензије занемариве у односу на растојања која прелази и нису неопходне за описивање његовог кретања. Ово зависи од конкретног случаја којим се бавимо. На пример, планету можемо сматрати материјалном тачком при посматрању њеног кретања око Сунца, али не и ако нас интересује њено ротирање око сопствене осе.

Позиција честице у простору је дефинисана помоћу њеног радијус вектора (вектора положаја) чије су компоненте дате у Декартовим координатама x, y, z. Извод $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ од $\vec{r}$ по t се зове **брзина** честице, а други извод $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ је **убрзање**. У наставку текста ћемо, као што је то обичај, извод по времену неке величине означавати тачком изнад те величине, као $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$.

Да бисмо дефинисали положај N честица у простору, неопходно је да задамо N радијус вектора, односно 3N координата. Број независних величина које морамо задати да бисмо једнозначно дефинисали положај система зовемо број **степени слободе** система. У претходном случају, број степени слободе је 3N. Те независне величине не морају нужно бити Декартове координате честица, већ било које величине које су најприкладније проблему који решавамо. Произвољних s величина $q_1, q_2, ..., q_s$ које у потпуности дефинишу положај система са s степени слободе зовемо **генералисане координате** система, а изводе $\dot{q}_i$ зовемо **генералисане брзине**.

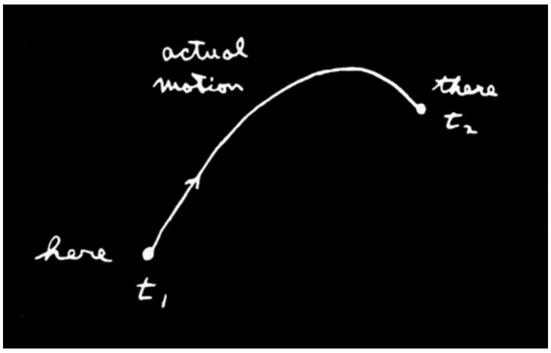
Када задамо вредности генералисаним координатама, ми смо задали како изгледа механичко стање у том тренутку, али не знамо како ће систем изгледати у наредним тренуцима. За дате вредности генералисаних координата, систем може имати произвољене генералисане брзине, а те брзине нам говоре како ће изгледати систем после извесног инфинитезималног времена dt.

Ако истовремено задамо вредности генералисаним координатама и брзинама система, из искуства знамо да ће нам то у потпуности дефинисати стање система и његово даље кретање ћемо, у принципу, моћи да одредимо. Математички речено, ово значи да ако у неком тренутку знамо све генералисане координате q и брзине $\dot{q}$, тада је једнозначно одређено убрзање $\ddot{q}$ у том истом тренутку.

Релације које повезују убрзања са координатама и брзинама називају се **једначине кретања**. То су диференцијалне једначине другог реда у односу на $q(t)$, чијим интеграљењем се принципијелно могу наћи те функције $q(t)$. тј. трајекторије кретања механичког система.

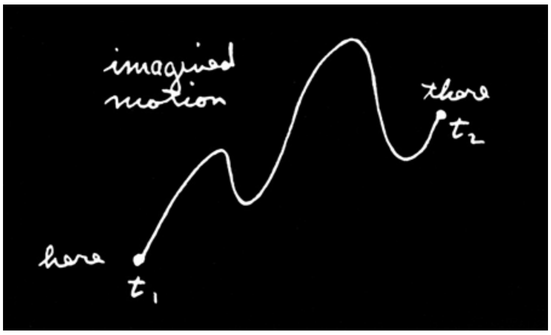
1.2 Принцип најмањег дејства

Најопштија формулација закона кретања механичких система је дата такозваним принципом најмањег дејства. Илуструјмо то на следећи начин. Замислите да имамо лоптицу (која се налази нпр. у гравитационом пољу) коју бацимо из једне тачке и која се слободно креће до неке друге тачке. Дакле бацимо је, она иде ка горе, почне да се спушта доле и стиже у жељену тачку за одређено време (слика 1.1). Сада пробамо да шетамо лоптицу од исте почетне до



Слика 1.1:

исте крајње тачке за исто време, али дуж неке нове путање (слика 1.2). Ако бисмо израчунали кинетичку енергију у сваком тренутку дуж путање, од тога одузели потенцијалну енергију у сваком тренутку дуж путање и то поинтегралили у времену, добићемо број који је већи него у случају праве путање лоптице. Другим речима, други Њутнов закон не морамо да пишемо



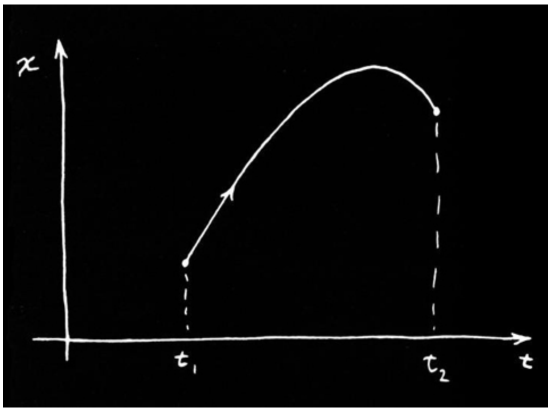
Слика 1.2:

у облику $F = ma$, већ као: Разлика средње кинетичке енергије минус средње потенцијалне енергије је минимална дуж путање између две тачке којом се креће тело (усредњавање вршимо по времену).

Да илуструјемо мало боље. Посматрамо честицу у гравитационом пољу, и та честиц има трајекторију $x(t)$ (за сада посматрајмо кретање у једној димензији, честица се креће само горе-доле, не може у страну да скреће), где нам x представља висину на којој се честица налази, кинетичка енергија је тада $T = \frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2$ а потенцијална енергија је константна у времену mgx. Сада одузмемо потенцијалну енергију од кинетичке енергије и то поинтегралимо по времену од почетног до крајњег тренутка кретања. Претпоставимо да се тело у почетном тренутку t_1 налазило на некој висини и да је у крајњем тренутку t_2 оно позиционирано у некој другој тачки у простору (1.3). Тај интеграл је облика

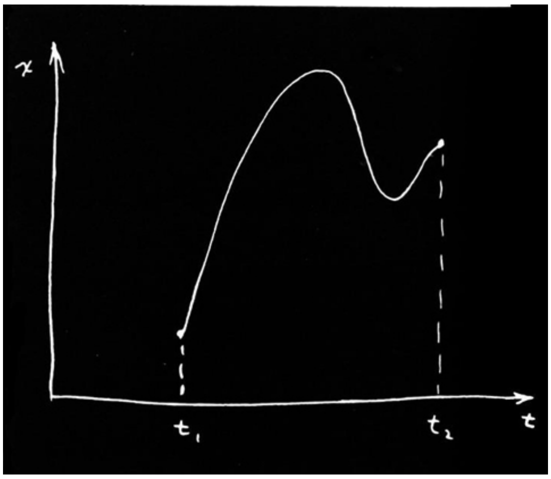
$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - mgx \right] dt$$

Ако бисмо нацртали график положаја у зависности од времена, добићемо неку криву (то ће бити параола) и за ту параболу овај интеграл ће имати неку вредност. Али ми можемо да замислимо да се тело кретало по некој другачијој кривој, да је ишло мало горе, па мало доле, као на слици



Слика 1.3:

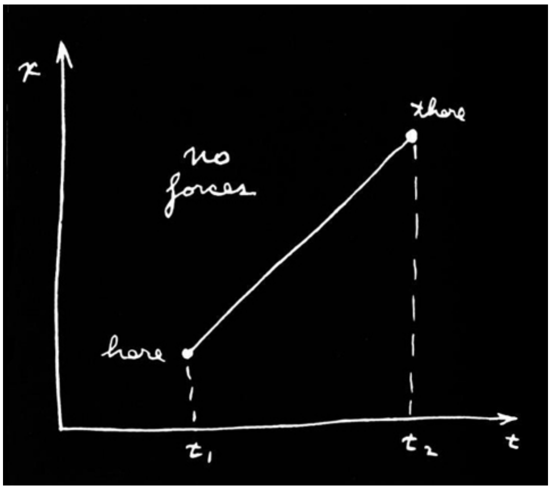
1.4. За овај кривудави пут можемо да израчунамо интеграл, тј. за било који пут можемо да израчунамо интеграл, али је невероватна чињеница то што ће само *прави пут* (онај који се уочава у стварности) имати минималну вредност овог интеграла! Хајде да испробамо на делу.



Слика 1.4:

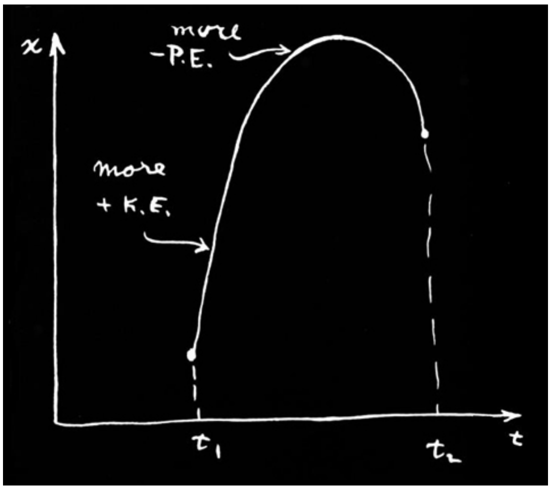
Узмимо за почетак слободну честицу која нема потенцијалну енергију. Тада ово наше правило каже да при кретању ове наше честице од тачке А до тачке Б за одређено време, интеграл кинетичке енергије је минималан, одакле следи да се честица креће равномерно праволинијски (знамо да је прави одговор да ће равномерно праволинијски да се креће). Зашто је тако? Зато што, ако се не би кретало константном брзином, онда би се кретало мало брже па мало спорије од средње вредности. Средња брзина ће свакако остати иста јер естица мора да оде од тачке А до тачке Б за фиксно време.

На пример, треба да стигнете од куће до ИС Петнице за фиксан временски период. То можемо да изведемо на неколико начина. Један је да на почетку убрзавамо као луди и да нагазимо на кочницу при крају пута, а можемо и све време да се крећемо константном брзином, или можемо да се крећемо мало напред па мало уназад, па опет напред итд. Једина ствар која мора да остане иста је средња брзина кретања, која је једнака пређеном путу подељеном са протеклим временом. Ако се крећемо на било који начин који није равномерно кретање, то ће значити да се некада крећемо мало брже а некада мало спорије од средње брзине. Средња вредност квадрата неке вредности која варира око средње вредности, као што знамо, мора бити веће од двадрата средње вредности. Одатле добијамо да ако варирамо брзину око неке вредности, у том случају је интеграл по времену од кинетичке енергије увек већи од тог интеграла у случају константне брзине. Дакле, интеграл је минималан када је брзина константна (када нису присутне спољашње силе). Прави пут се види на слици 1.5. Сада посматрамо честицу



Слика 1.5:

која се креће у гравитационом пољу. Ако је бацимо навише, она у почетку има високу кинетичку енергију и брзо се креће ка горе, временом успорава и кинетичка енергија се смањује, при чему се потенцијална енергија повећава. Дакле, треба разлику кинетичке и потенцијалне енергије минимизовати у средњем на целом путу. Пошто се потенцијална енергија повећава када се честица пење навише, то нам даје мању разлику $T - U$ ако честица што пре достигне велику висину на којој је високо U (слика 1.6). Али са друге стране, не сме честица много брзо да се



Слика 1.6:

пење, јер би то значило да ће имати веома велику кинетичку енергију што повећава вредност интеграла. Дакле, не желимо много брзо да идемо на горе да не бисмо повећали интеграл, али не желимо ни да се преспоро пењемо, да не бисмо имали премалу потенцијалну енергију, што нам овећава интеграл. Решење се крије у некаквом балансу између повећавања потенцијалне енергије али тако да не повећамо и кинетичку превише, тако да разлика $T - U$ буде што мање могуће на целом путу. То је суштина.

Сада ћемо да докажемо ову тврдњу. При томе ћемо користити нову математику, која није једноставна. Дефинисаћемо величину која се зове **дејство**, које означавамо са S. Дејство је дефинисано као интеграл по времену разлике кинетичке и потенцијалне енергије.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt$$

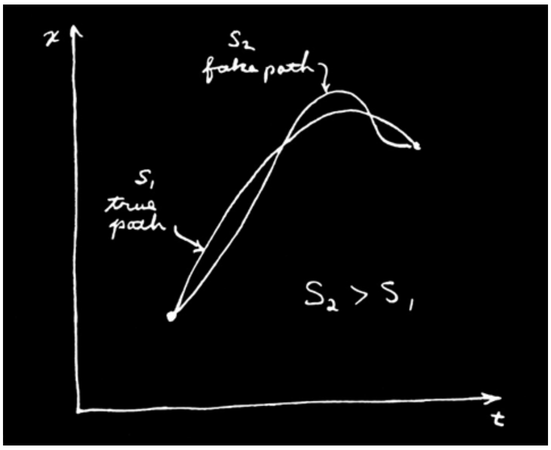
И T и U су функције које зависе од времена. За различите путеве којим хипотетички може да се креће честица добијамо различите вредност за дејство (обичан реалан број). Наш математички проблем је да нађемо криву за коју ће дејство бити минимално. Та крива ће представљати прави пут.

Можда вам ово заличи на обичан проблем налажења максимума и минимума функција. Израчунате дејство и диференцирате да добијете минимум, **али пазите!** Обично имамо неку функцију која зависи од неке величине и ми желимо да нађемо вредност те величине за случај када је функција највећа или најмања. На пример, имамо металну шипку коју грејемо на неком њеном делу и та топлота се шири. Свака тачка на шипци има неку вредност температуре и ми желимо да нађемо тачку у којој је температура највећа. Али у нашем случају код дејства, ми свакој путањи додељујемо неку бројну вредност, што је сасвим другачија ствар, и желимо да нађемо пут који даје најмањи број. То представља сасвим другачију грану математике! Први проблем се односи на обичан диференцијални рачун, а у случају дејства, ми користимо **варијациони рачун**.

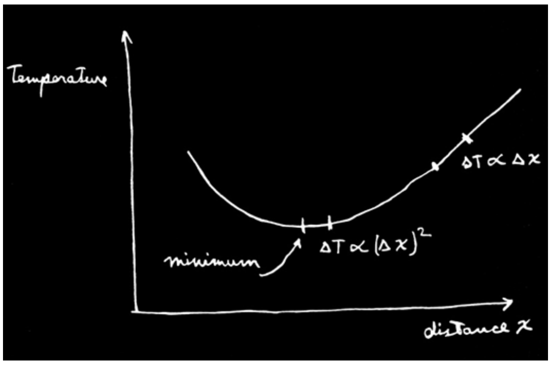
Постоје разни проблеми у матеамтици који се решавају помоћу варијационог рачуна. На пример, кружницу обично дефинишемо као скуп тачака у равни које су на једнаком растојању од неке задате тачке (центра кружнице), али постоји још једна дефиниција: кружница је затворена крива задате дужине која у равни окружује највећу могућу површину. Било која друга затворена крива исте дужине заокружује мању површину у односу на кружницу. Дакле, ако бисмо формулисали проблем: Пронађи криву која за дату дужину окружује максималну површину, решавали бисмо проблем из области варијационог рачуна, што није онај уобичајени рачун на који сте навикли.

Идеја за решавање нашег проблема је следећа. Замислимо да постоји права путања којом се креће честица, и да је било која друга путања коју можемо да нацртамо заправо лажна, тако да при рачунању дејства за лажне путање увек добијамо већи број од дејства за праву путању (слика 1.7). Следи нам решавање следећег проблема: Проналажење праве путање. Где је? Један начин јесте да израчунамо дејства за милионе и милионе путања и нађемо минимално међу њима. То минимално дејство одговара правој путањи.

То је један начин, али ми можемо много боље од тога! Када имамо величину која има минималну вредност, код обичне функције попут температуре, особина минимума је да ако се ми удаљимо мало од минимума, за величину првог степена (Δx), промена функције ће бити тек другог реда $\Delta T \propto (\Delta x)^2$. На било ком другом делу функције, ако се изместимо за мало, промена саме функције је првог реда $\Delta T \propto \Delta x$. Али, при малом померају у односу на минимум, промена функције у првом реду апроксимације је нула (слика 1.8). То је оно што ћемо да користимо да бисмо одредили праву путању. Ако знамо шта је права путања, онда друга путања која се само за мало разликује од ње, у првом реду апроксимације, даје исто дејство. Било каква разлика између њих ће се јавити тек у другом реду апроксимације, ако се стварно ради о минимуму.



Слика 1.7:



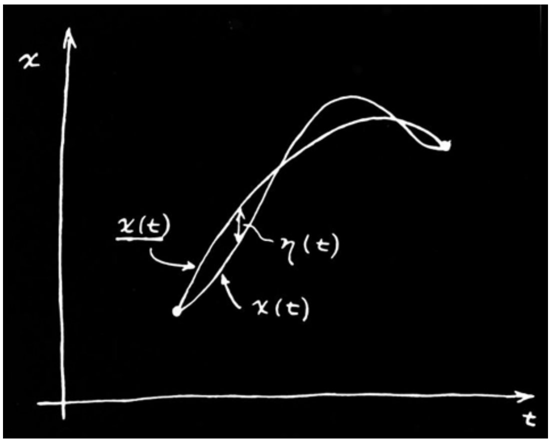
Слика 1.8:

То је лако доказати. Ако постоји промена у првом реду апроксимације када за мало променимо нашу путању, тада имамо промену дејства које је пропорционално тој малој промени пута. Тада ће нам се и дејство повећати, што има смисла јер тражимо минимум, па девијација од правог пута повећава S. Али у том случају, ако бисмо променили знак девијације пута, тада ћемо смањити дејство, односно нова путања ће имати мање дејство од почетног! То значи да почетни пут никако није могао да буде онај прави. Дакле, једини начин да будемо сигурни да се ствар ради о минимуму је да при девијацији путање у првом реду апроксимације дејство остаје непромењено, да је промена дејства пропорционална тек са квадратом варијације путање.

Дакле, прави пут ћемо назвати $x_0(t)$, што је онај који желимо да нађемо. Узмемо неки произвољан пут $x(t)$ који одсупа од правог пута за неку малу ведност коју зовемо $\eta(t)$ (слика 1.9).

Сада је идеја следећа. Ако имамо S за путању $x(t)$ и S за праву путању $x_0(t)$ (за које ћемо писати S_0), и ако сада израчунамо разлику $S - S_0$, она ће бити једнака нули у првом реду апроксимације за мало одступање $\eta(t)$. Наравно да та разлика може бити различита од нуле у другом реду апроксимације, али у првом реду та два дејства морају бити једнака.

И ово мора да важи за свако $\eta(t)$. Ово није баш тачно, јер додатни услов који морамо да наметнемо на $\eta(t)$ је да посматрамо само путеве који почињу и завшавају се у истим тачкама А и Б, у суротном овај метод не би имао смисла. Сваки пут креће из исте тачке у почетном тренутку t_1 и завршава се у некој другој тачки у тренутку t_2, и те тачке и тренутке држимо



Слика 1.9:

фиксираним. То значи да мора да важи $\eta(t_1) = 0$ и $\eta(t_2) = 0$. Уз овај услов, наш математички проблем је добро дефинисан.

Идеја је да сада уврстимо $x(t) = x_0(t) + \eta(t)$ у израз за дејство

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] dt$$

где је $V(x)$ потенцијална енергија. Извод $\frac{dx}{dt}$ је извод од $x_0(t) + \eta(t)$, тако да за дејство добијамо

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx_0}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - V(x_0 + \eta) \right] dt$$

Распишимо мало детаљније следећи израз. За квадратни члан имамо

$$\left(\frac{dx_0}{dt} \right)^2 + 2 \frac{dx_0}{dt} \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2$$

Али, пошто нас не занимају други и виши степени, можемо слободно да издвојимо све чланове са другим степеном η^2 и вишим степенима и ставимо их у једну заграду. Кинетички члан нам постаје сада

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx_0}{dt} \right)^2 + m \frac{dx_0}{dt} \frac{d\eta}{dt} + (\text{други и виши степени})$$

Сада треба да распишемо потенцијал $V(x_0 + \eta)$. С обзиром да сматрамо да је η мала величина, можемо $V(x)$ да распишемо у Тејлоров ред

$$V(x_0 + \eta) = V(x_0) + \eta V'(x_0) + \frac{\eta^2}{2} V''(x_0) + ...$$

Сада се враћамо на израз за дејство и све чланове η другог и вишег реда стављамо у заграду заједно

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx_0}{dt} \right)^2 - V(x_0) + m \frac{dx_0}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(x_0) + (\text{други и виши степени}) \right] dt$$

Можемо прметити да прва два члана у интегралу заједно чине S_0. Када пребацимо S_0 са друге стране једнакости и ако означимо $\delta S = S - S_0$ добијамо

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{dx_0}{dt} \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(x_0) \right] dt$$

где смо изоставили чланове другог и вишег реда.

Сада, добили смо овај интеграл и не знамо још шта је x_0 али знамо да за било које η овај интеграл мора да износи 0.

Сада желимо да сведемо $\frac{d\eta}{dt}$ на η и то можемо да урадимо помоћу парцијалне интеграције.

Генерлни принцип парцијане интеграције је следећи

$$d(\eta f) = \eta \frac{df}{dt} + f \frac{d\eta}{dt}$$

а ми желимо

$$\int f \frac{d\eta}{dt} dt = \eta f - \int \eta \frac{df}{dt} dt$$

У нашем изразу за δS, функција f представља $m\frac{dx_0}{dt}$, тако да када уврстимо у δS добијамо

$$\delta S = m \frac{dx_0}{dt} \eta(t) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(m \frac{dx_0}{dt} \right) \eta(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(x_0) \eta(t) dt$$

Први члан нам отпада због граничног услова да је $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Следи

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[-m \frac{d^2 x_0}{dt^2} - V'(x_0) \right] \eta(t) dt$$

чиме смо довели наш интеграл на жељени облик.

Имамо да важи да је интеграл било чега пута $\eta(t)$ увек једнак нули

$$\int F(t) \eta(t) dt = 0.$$

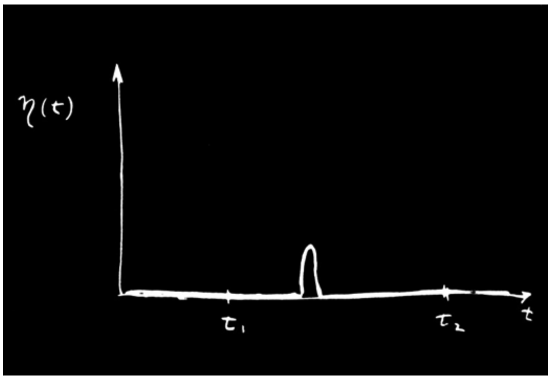
Имамо неку функцију која зависи од времена, помножимо је са $\eta(t)$ и поинтегралимо по целом временском интервалу, и добијемо нула. Ово значи да је функција $F(t) = 0$. Ево једног једноставног доказа.

Замислимо да је функција $\eta(t)$ једнака нули за све вредности t сем у уској околини неке конкретне вредности (слика 1.10). Када интегралимо производ F и $\eta(t)$, једино место од којед бисмо очекивали ненулти допринос интегралу је управо око те неке вредности где је $\eta(t)$ ненулто, али с обзиром да је интеграл нула, то значи да F баш око те вредности узима вредност нула. Потшо је $\eta(t)$ произвољна функција и тај ненулти брег можемо произвољно да шетамо, то значи да функција F мора бити идентички једнака нули на целом интервалу.

Одавде следи да је

$$\left[-m \frac{d^2 x_0}{dt^2} - V'(x_0) \right] = 0$$

Дакле, ову једначину задовољава једино прави пут којим се честица креће јер је у овом случају дејство минимално. Ова једначина је заправо $F = ma$. Први члан је маса пута убрзање, а други члан је изод потенцијалне енергије, што је сила.



Слика 1.10:

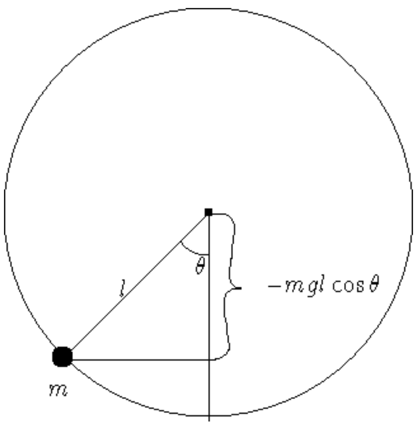
Дакле, што се тиче конзервативних система, показали смо да принцип најмањег дејства даје тачно решење. Каже нам да пут који има минимално дејство задовољава Њутнов закон.

Све ово може да се уради и у виш димензија, није уопште проблем. Такође, овај метод може да се генерализује на више честица.

Рекли смо да једначина кретања задовољава Њутнов закон, али ово и није баш тачно, јер код Њутновог закона дозвољене су и неконзервативне силе попут силе трења, што није дозвољено код принципа најмањег дејства, јер он не ради за случај неконзервативних сила, већ само када силе имају неки свој одговарајући потенцијал (конзервативне силе). Али, неконзерватвне силе постоје само ако занемаримо микроскопске интеракције и сличне компликације, јер су у суштини све силе у природи на микроскопском нивоу заправо конзервативне. Тако да законе фундаменталних сила (интеракција) можемо да формуулишемо преко принципа најмањег дејства.

1.3 Лагранжијан и једначине кретања идеалног клатна

Дато је идеално клатно масе m и дужине l које се креће у вертикалној равни у хомогеном гравитационом пољу са гравитационим убрзањем g (слика 1.11). Природни конфигурациони



Слика 1.11:

простор идеаног клатна је круг (скуп тачака у простору у коме може да се нађе масени део клатна). Природна координата за овај конфигурацоини простор је θ. Даље, имамо:

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2$$

$$U = -mgl\cos\theta$$

Одавде следи да је лагранжијан

$$L = \frac{1}{2}m(ldot\theta)^2 + mgl\cos\theta$$

У Лагранжевом формализму, једначине кретања система добијамо из **Ојлер-Лагранжових једначина**:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q}}$$

Израчунавањем за овај наш пример клатна добијамо:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta.$$

Када ове изразе уврстимо у Ојлер-Лагранжеве једначине, добијамо

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) = -mgl\sin\theta$$

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

односно као

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

У Њутновој механици једначине кретања представљамо у облику другог Њутновог закона

$$m\ddot{q} = f(q,t)$$

где је $f(q,t)$ сила која делује на честицу. Исту једначину добијамо из Лагранжевог формализма ако је $f(q,t)$ конзервативна сила, тј. ако има одговарајући потенцијал $U(q,t)$ тако да важи $f(q,t) = -\frac{\partial U}{\partial q}$. Заиста, Лагранжијан можемо да напишемо у облику

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{q})^2 - U(q,t)$$

Ако бисмо увстиили овај Лагранжијан у Ојлер-Лагранжеве једначине, добили бисмо једначину $m\ddot{q} = f(q,t)$.

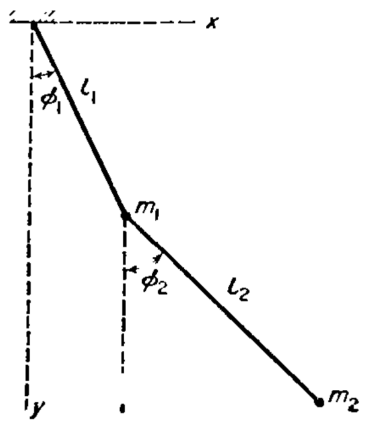
2 Задаци

За следеће системе наћи Лагранжијан, а затим на основу Ојлер-Лагранжевих једначина наћи једначине кретања. Ојлер-Лагранжева једначина је:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0}$$

где су q и $\dot{q}$ генералисане координате и брзине.

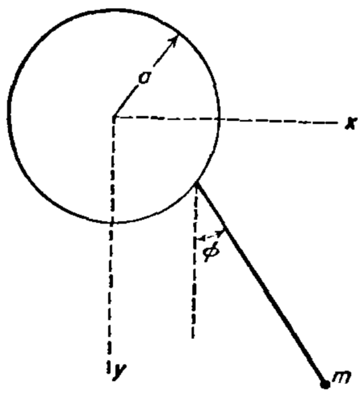
Задатак 1. Двоструко клатно у равни (слика 2.1).



Слика 2.1:

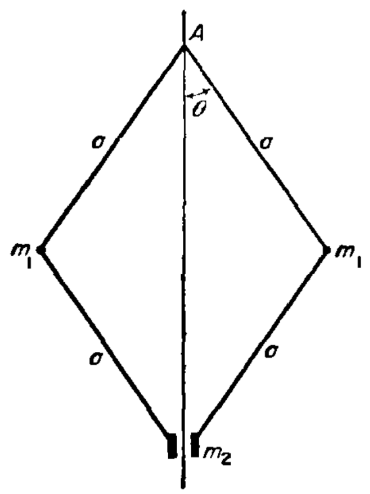
Задатак 2. Идеално клатно масе m је окачено о тачку која:

- (а) је на вертикалном кругу који ротира угаоном брзином ν (слика 2.2),
- (б) осцилује хоризонтално у равни кретања клатна по формули $x = a\cos\nu t$,
- (в) осцилује вертикално по једначини $y = a\cos\nu t$.



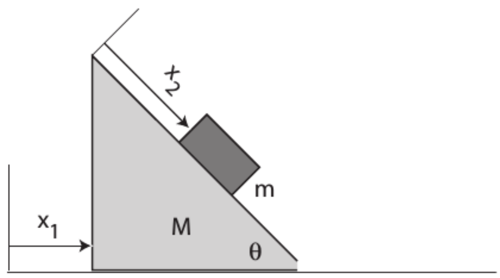
Слика 2.2:

Задатак 3. Посматрамо систем са слике 2.3. Честица масе m_2 креће се дуж вертикалне осе и цео систем ротира око осе константном угаоном брзином Ω.



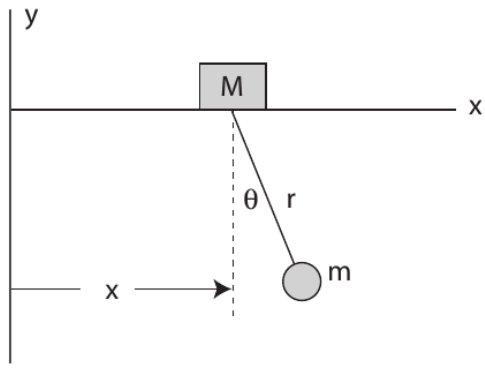
Слика 2.3:

Задатак 4. На слици 2.4 је дата кутија масе m која се клиза низ стрму раван масе M. Рампа се помера без трења на хоризонталној равни и њена позиција је означена са x_1. Кутија клизи низ стрму раван без трења и њен положај у односу на стрму раван је задат са x_2.



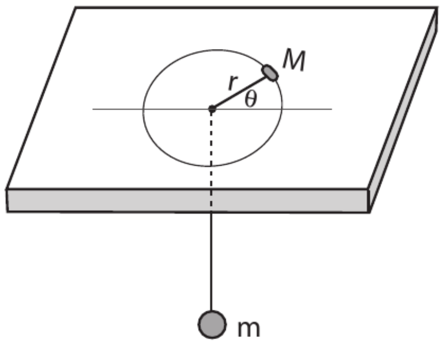
Слика 2.4:

Задатак 5. На слици 2.5 је дато иделно клатно дужине r и масе m које је окочено о тело масе M које с креће дуж x-осе без трења.



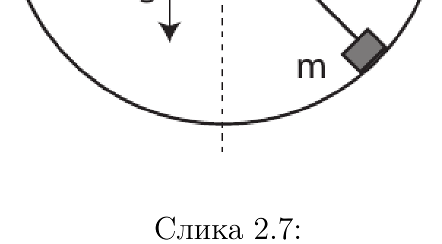
Слика 2.5:

Задатак 6. На слици 2.6 је дато тело масе M које је повезано с другим телом масе m. Тело масе M се креће без трења по кружници полупречника r на хоризонтачној површини стола. Те две масе су повезане безмасеном неистегљивом нити дужине l која пролази кроз рупу на столу. Позиција тела масе M је задата у односу на рупу у столу преко r и θ.



Слика 2.6:

Задатак 7. Честица масе m се кеће слободно по унутрашњој страни полулопте полупречника R, чија оса је паралелна вертикали. Положај честице је одређен преко θ и φ (слика 2.7).



Слика 2.7:

Библиографија

[1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz *Course of Theoretical Physics: Vol. 1, Mechanics*. Pergamon Press / Addison-Wesley Publishing (1960)

[2] R. P. Feynman *The Feynman Lectures on Physics, Vol. 2: The Definitive Edition*. Addison Wesley; 2nd edition (2011)