

Obrada rezultata merenja

- Rezultati merenja
- Greške merenja
- Zaokruživanje
- Obrada rezultata merenja
- Direktno i indirektno merene veličine
- Računanje grešaka
- Linearizacija funkcija
- Crtanje grafika
- Fitovanje (računanje koeficijenta pravca)

Rezultati merenja

- Merenje je procedura kojom se fizičkoj veličini pridružuje brojna vrednost.
- Rezultat merenja je uvek **interval** vrednosti (a ne jedna vrednost):

(rezultat±greška)[merna jedinica]

- Prikazivanje rezultata merenja (eksplicitno):

$$\langle X \rangle = 4.5436\text{m} \quad \Delta X = 0.0002\text{m}$$

$$X = (4.5436 \pm 0.0002) \text{ m}$$

Zaokruživanje (i majoriranje)

- **Rezultat merenja mora imati onoliko cifara koliko ima greška.**
 - Greška može imati najviše jednu ili dve (ukoliko je prva značajna cifra 1) cifre različite od nule.
 - Rezultat merenja se ZAKRUŽUJE u skladu sa greškom.
 - Greška se uvek MAJORIRA, tj. zaokružuje na veći broj.
- Primeri majoriranja:

$$\Delta X = 0.00546 \Rightarrow \Delta X = 0.006$$

$$\Delta X = 0.0147 \Rightarrow \Delta X = 0.015$$

$$\Delta X = 62 \Rightarrow \Delta X = 70$$

Pravila zaokruživanja

- Ako je prva cifra koju treba ukloniti:
 - između **0** i **4**, sve cifre se odbacuju.
 - između **6** i **9**, poslednja cifra se uvećava za **1**.
 - **5**:
 - **A)** a pritom iza nje ima još cifara različitih od nule, poslednja cifra se uvećava za 1.
 - **B)** a pritom iza nje nema više cifara ili su nule, obično se poslednja cifra koja ostaje uvećava za 1 ako je neparna, a ne menja ako je parna.

Primeri zaokruživanja

$$\begin{array}{ccccc} x = 1.234567 \text{ m} & \xrightarrow{\text{I korak}} & x = 1.234567 \text{ m} & \xrightarrow{\text{II korak}} & x = 1.234 \text{ m} \\ \Delta x = 0.004567 \text{ m} & & \Delta x = 0.005 \text{ m} & & \Delta x = 0.005 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x = 0.04575 \text{ m} & \xrightarrow{\text{I korak}} & x = 0.04575 \text{ m} & \xrightarrow{\text{II korak}} & x = 0.0458 \text{ m} \\ \Delta x = 0.001456 \text{ m} & & \Delta x = 0.0015 \text{ m} & & \Delta x = 0.0015 \text{ m} \end{array}$$

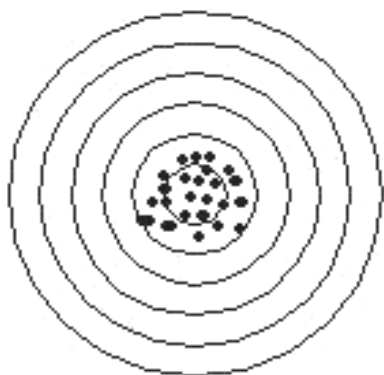
$$\begin{array}{ccccc} x = 13.2323 \text{ m} & \xrightarrow{\text{I korak}} & x = 13.2323 \text{ m} & \xrightarrow{\text{II korak}} & x = 13.2 \text{ m} \\ \Delta x = 0.23467 \text{ m} & & \Delta x = 0.3 \text{ m} & & \Delta x = 0.3 \text{ m} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} x = 3467664 \text{ m} & \xrightarrow{\text{I korak}} & x = 3467664 \text{ m} & \xrightarrow{\text{II korak}} & x = 3468000 \text{ m} \\ \Delta x = 2346 \text{ m} & & \Delta x = 3000 \text{ m} & & \Delta x = 3000 \text{ m} \end{array}$$

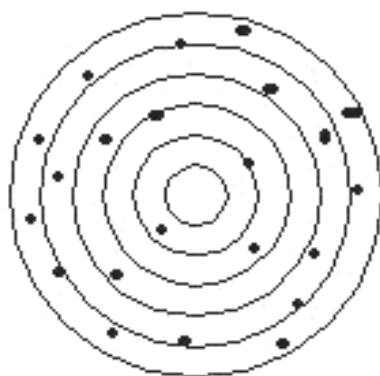
$$x = (3.468 \pm 0.003) \cdot 10^6 \text{ m}$$

Tačnost i preciznost

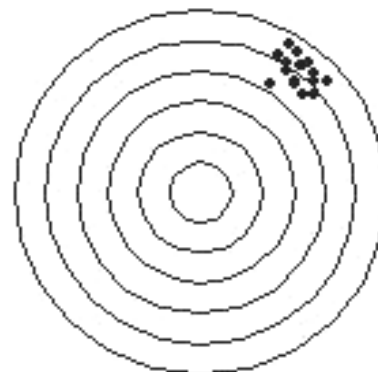
- Tačnost označava koliko je rezultat merenja blizu "prave" vrednosti; meri se apsolutnom i relativnom greškom.
- Preciznost označava koliko je rezultat merenja blizu vrednostima koje se dobijaju ponavljanjem merenja na isti način (nema veze sa pravom vrednošću).



tačno i precizno



tačno i neprecizno



netačno i precizno

Obrada rezultata merenja

Srednja vrednost merenja:

$$\bar{x} = \langle x \rangle = x_{sr} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \sum_{i=1}^n x_i$$

n – broj merenja
 x_1, x_2, \dots, x_n – vrednost izmerenih velicina

Apsolutna greška predstavlja odstupanje od srednje vrednosti koja definiše interval u kome se nalazi prava vrednost fizičke veličine. U zavisnosti od broja merenja računa, se na različite načine:

1) ukoliko je broj mernih uzoraka manji od 6, onda je apsolutna greška jednaka maksimalnoj razlici izmerene veličine i srednje vrednosti:

$$n < 6 \quad \Delta x = \max |x_i - \bar{x}|$$

2) ukoliko je broj mernih uzoraka veći od 6, onda se apsolutna greška računa kao standardna devijacija relacijom:

$$n \geq 6 \quad \sigma(x) = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Obrada rezultata merenja

- **Relativna greška** predstavlja odnos između apsolutne greške i srednje vrednosti merenja. Najčešće se izražava u procentima jer pokazuje preciznost merene veličine.

$$\delta = \frac{\sigma(x)}{\bar{x}} = \frac{\Delta x}{\bar{x}}$$

Šta se uzima za grešku merenja?

- Ukoliko je izvršeno samo jedno merenje, onda se za grešku tog merenja uzima instrumentalna greška, što može biti:
 - klasa tačnosti instrumenta, koja je naznačena na instrumentu u procentima;
 - vrednost polovine ili celog najmanjeg podeoka instrumenta (ukoliko nije naznačena klasa tačnosti).

Greške (in)direktno merenih veličina

- Direktno merene veličine su veličine čije se vrednost može očitati sa instrumenata. Indirektno merene veličine su one koje se ne mogu eksperimentalno izmeriti, već se računaju korišćenjem fizičkih zakona (npr. brzina ili otpor).
- Apsolutna greška indirektno merene veličine $y=f(x)$ približno je jednaka vrednosti prvog izvoda funkcije y u tački x izmerene vrednosti, pomnoženom greškom te direktno merene veličine x . U slučaju više promenljivih, maksimalna apsolutna greška data je kao zbir pojedinačnih maksimalnih doprinosa grešaka:

$$\Delta y = \sum_i \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i \qquad \sigma_y = \sum_i \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \sigma_{x_i}$$

Primer računanja grešaka preko parcijalnih izvoda

$$s = k x^2 y^3$$

$$\Delta s = \frac{\partial s}{\partial k} \Delta k + \frac{\partial s}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial s}{\partial y} \Delta y$$

$$\frac{\partial s}{\partial k} = x^2 y^3$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = k x^2 3y^2$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = k y^3 2x$$

Tablica grešaka

- Najveći broj grešaka može se ipak izračunati bez upotrebe parcijalnih izvoda.

$$y = a \pm b \quad \Delta y = \Delta a + \Delta b$$

$$y = ab \quad \frac{\Delta y}{|y|} = \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right|, \quad \delta(y) = \delta(a) + \delta(b)$$
$$y = a/b$$

$$y = kx \quad \Delta y = k\Delta x$$

$$y = x^n \quad \frac{\Delta y}{|y|} = n \frac{\Delta x}{x} \quad \delta(y) = n \cdot \delta(x)$$

$$y = \ln x \quad \Delta y = \frac{\Delta x}{x}$$

$$y = e^x \quad \frac{\Delta y}{y} = \Delta x$$

Tabela rezultata

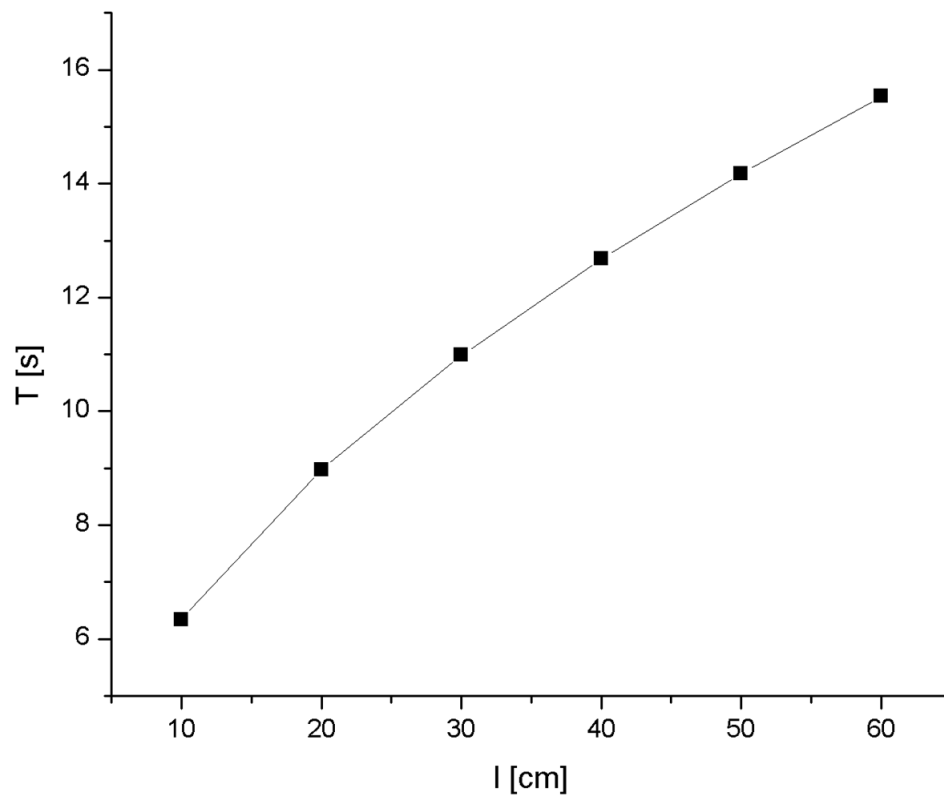
L[cm]	T[s]
10	6,3
20	8,9
30	10,9
40	12,6
50	14,1
60	15,5

Već u tabeli se rezultati prikazuju sa zaokruženim vrednostima.

Crtanje grafika

- Milimetarski papir
- Naslov grafika
- Razmera
 - Tačke raspoređene po što većoj površini
 - Dozvoljene razmere: 1:1, 1:2, 1:4, 1:5, 1:10, 1:100...
 - **Nedozvoljene** razmere: 1:3, 1:6, 1:7...
 - Dozvoljeno skaliranje
- Ose
 - Moraju biti označene sa sve mernim jedinicama
 - Postavljanje koordinatnog početka je proizvoljno (kao i orijentacija papira)
 - Ako se traži odsečak na osi, ona mora biti postavljena odgovarajuće

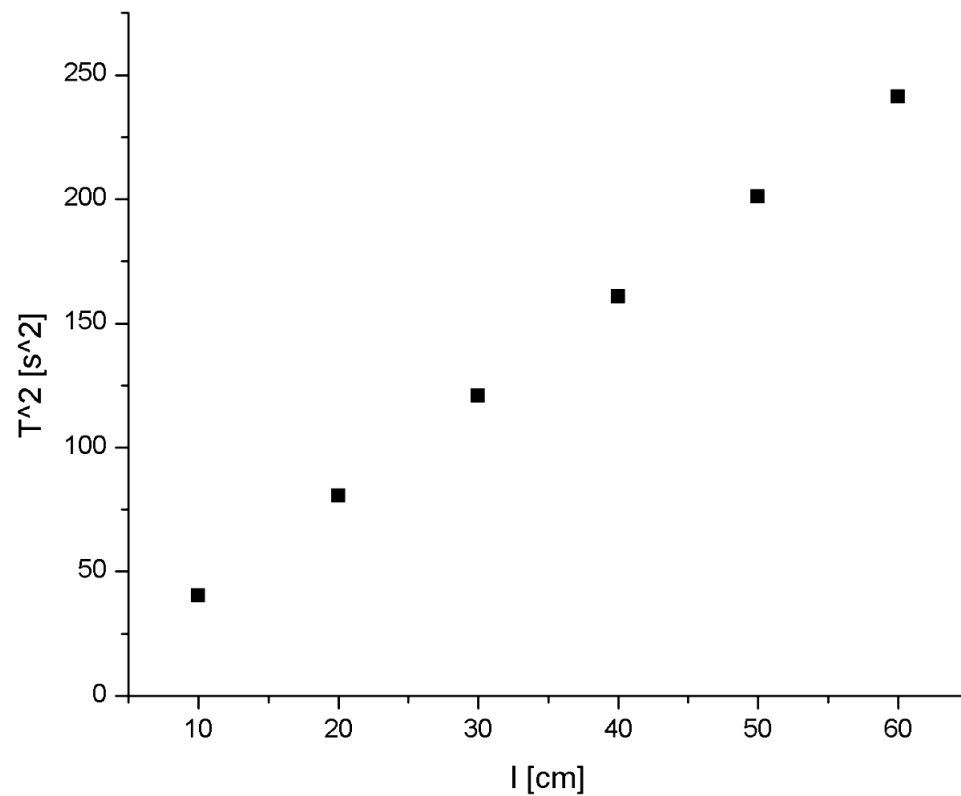
Crtanje grafika



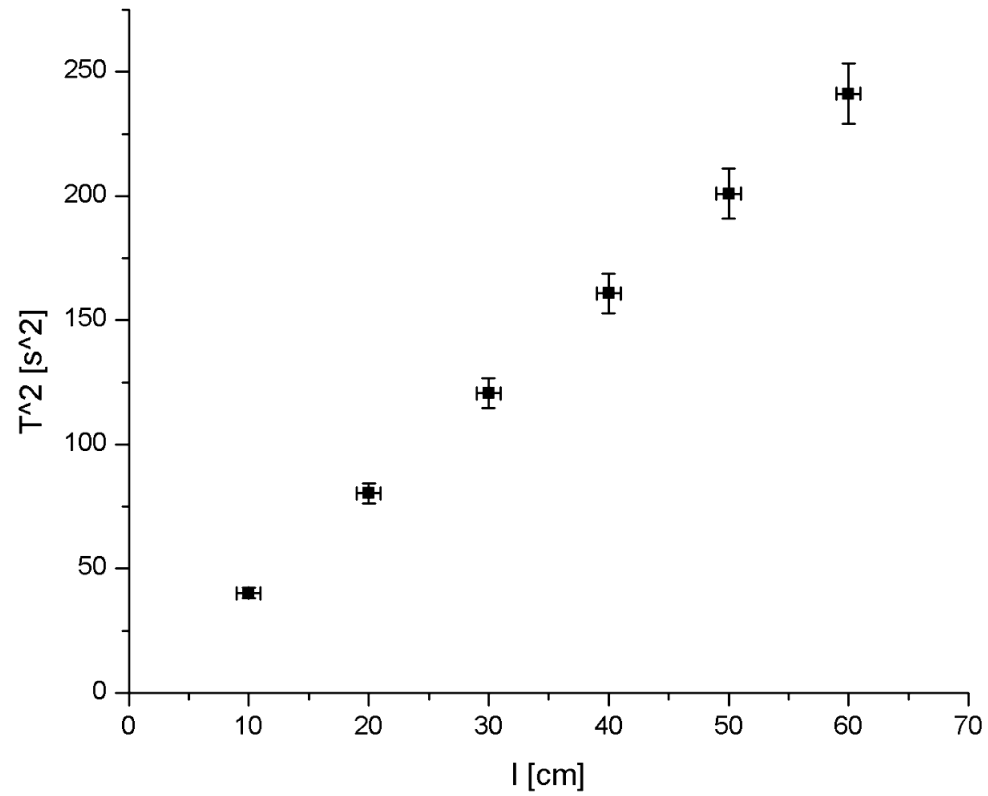
Proširena tabela

L[cm]	$T^2[s^2]$	$\Delta T^2[s^2]$	$\Delta L[cm]$
10	40	2	1
20	80	4	1
30	120	6	1
40	160	8	1
50	200	10	1
60	241	12	1

Linearizovan grafik



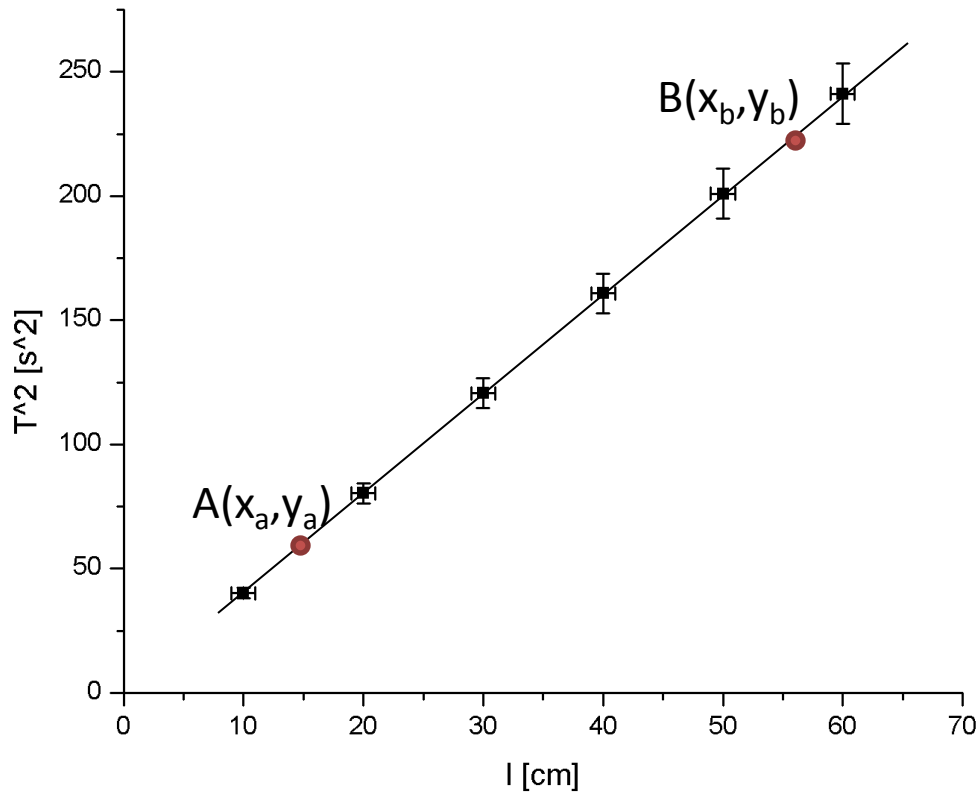
Ucrtavanje grešaka



Koeficijent pravca

- Grafička metoda
 - Ucrtavanje optimalne prave
 - Skoro jednak broj tačaka ispod i iznad
 - Prolazi kroz oblast obuhvaćenu greškama
 - Biranje i ucrtavanje dve neeksperimentalne tačke
 - Između prve i druge, pretposlednje i poslednje
 - Tako da se koordinate lako očitaju
 - Greške neeksperimentalnih tačaka
 - Po obe veličine na osama uzimaju se za greške najveća od grešaka susednih eksperimentalnih tačaka

Prava i neeksperimentalne tačke



L [cm]	T^2 [s ²]	ΔT^2 [s ²]	ΔL [cm]
10	40	2	1
20	80	4	1
30	120	6	1
40	160	8	1
50	200	10	1
60	241	12	1

Koeficijent pravca

- Grafička metoda
 - Koeficijent pravca

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$\frac{\Delta k}{k} = \left(\frac{\Delta x_a + \Delta x_b}{x_b - x_a} + \frac{\Delta y_a + \Delta y_b}{y_b - y_a} \right)$$

Koeficijent pravca

- Metod najmanjih kvadrata
 - Računski metod
 - Više računa, ali veća i tačnost
 - Ako je linearna zavisnost oblika: $y = a + b x$
 - Koeficijenti a, b se dobijaju preko formula:

$$w_i = \frac{1}{\Delta y^2}$$

$$\Delta = \sum w \sum wx^2 - \left(\sum wx \right)^2$$

$$b = \frac{\sum w \sum wxy - \sum wx \sum wy}{\Delta}$$

$$a = \frac{\sum wx^2 \sum wy - \sum wx \sum wxy}{\Delta}$$

$$\Delta b = \sqrt{\frac{\sum w}{\Delta}}$$

$$\Delta a = \sqrt{\frac{\sum wx^2}{\Delta}}$$

Konačan rezultat

- Tražena vrednost je izražena preko koeficijenta pravca dobijene prave
 - Izračunava se tražena vrednost
 - Određuje se njena greška – greška indirektnog merenja
 - Rezultat sa greškom i mernom jedinicom se predstavlja u zaokruženom odgovarajućem obliku

$$g=(9.81\pm 0.01)\text{m/s}^2$$

U izveštaju...

- Obrazložiti svaki postupak
- Navesti ključne formule i rezultate
- Ispoštovati sva navedena pravila računanja i predstavljanja rezultata
- Diskusija rezultata
- Izveštaj je tekst – formule i drugi elementi se uklapaju u dosledne rečenice