Гранична вредност функције - лимес

Посматрајмо следеће разломке:

$$\frac{1}{10} = 0.1$$

$$\frac{1}{100} = 0.01$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{100000} = 0.00001$$

$$\vdots$$

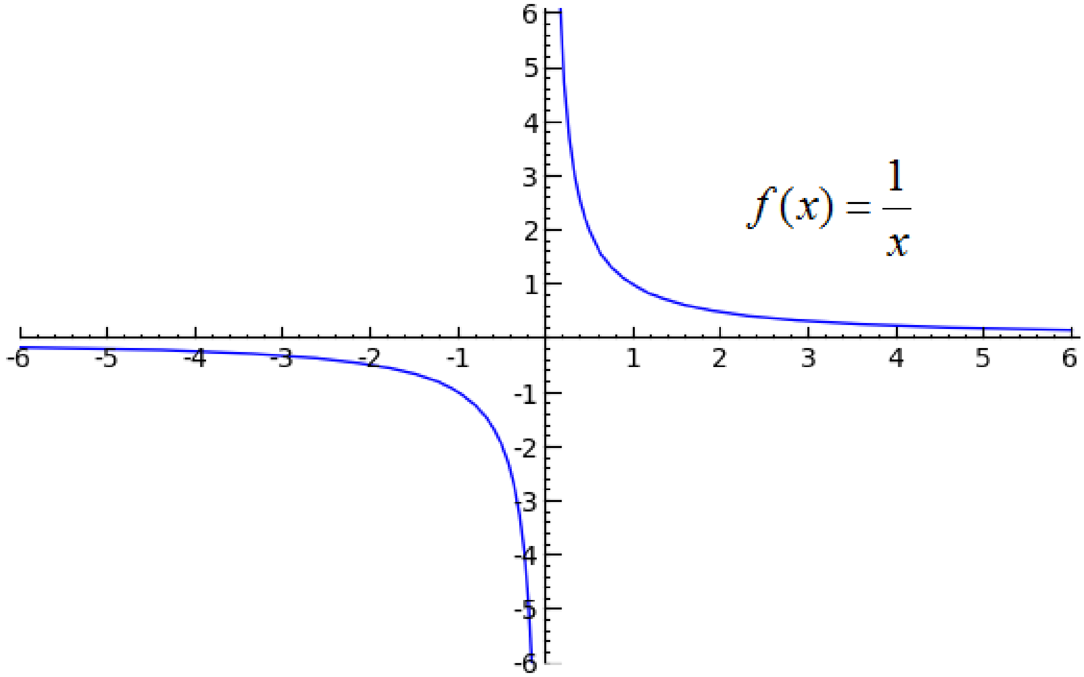
$$\frac{1}{1000000000000000} = 0.000000000000001$$

Примећујемо да како делимо јединицу са све већим бројем, добијамо све мањи резултат, који постаје све ближи *нули*. Ако сада посматране разломке посматрамо као функцију $f(x) = \frac{1}{x}$, можемо рећи да како x расте (тј. приближава се бесконачности), функција $f(x)$ се приближава 0. Ово се математички може записати:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 ,$$

Што читамо: „гранична вредност (или лимес) функције $\frac{1}{x}$, када x тежи бесконачно је 0“!

Ово се јасно може видети и ако нацртамо график функције $f(x) = \frac{1}{x}$, као што је показано испод, на слици 1:



Слика 1. *График функције* $f(x) = \frac{1}{x}$.

Уочавамо да како x постаје све веће, то се функција све више „спушта'' ка 0. Исто би се дешавало и са функцијом $f(x) = \frac{2}{x}$ или $f(x) = \frac{3}{x}$ или било који коначан број кроз x. Јер који год број стајао уместо 1, ми њега делимо са све већим и већим бројем, па ће резултат функције свеједно постајати све мањи, односно ближиће се 0, можда спорије, али нама је битан само крајњи резултат.Такође, уместо x, може да стоји и x^2,x^3или x на било који степен већи од 1, јер како се x приближава бесконачности, то се x^2 нпр. још брже приближава бесконачности (делимо са још већим бројем)!

Сада када смо стекли интуитивну представу о лимесу, погледајмо на једном примеру, како бисмо израчунали лимесе следећих функција.

Пример 1.Израчунати следеће лимесе:

а) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + 10\,x - 3}{5\,x^3 - 7\,x^2 + x + 1}$

б) $\lim_{x \to \infty} \frac{3\,x^3 - 2\,x^2 - 5\,x - 4}{2x^5 - x^3 + 1}$

в) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 - x^3 + 1}{3\,x^3 - 2\,x^2 - 5\,x - 4}$

Решење.Идеја у сва три случаја је да најпре издвојимо сабирак са највећим степеном у бројиоцу и сабирак са највећим степеном у имениоцу испред заграде.

$$a)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+10\,x-3}{5\,x^3-\,7\,x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(1+\frac{10}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{x^3\left(5-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{10}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{5-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$$

Као што смо већ закључили, како x тежи 0, разломци $\frac{10}{x^2}, \frac{3}{x^3}, \frac{7}{x}, \frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{x^3}$ теже 0, тако да нам остају само 1 и 5, па закључујемо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{10}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{5-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{5}.$$

б) Поступамо слично као у претходном поступку.Највећи степен у бројиоцу је x^3, а у имениоцу x^5, па њих извлачимо испред заграде.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3\,x^3-\,2\,x^2-5\,x-4}{2\,x^5-x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3\,-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)}{x^5\left(2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{2x^2}=0$$

в) Сада је највећи степен у бројиоцу x^5, док је у имениоцу највећи степен x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-x^3+1}{3\,x^3-\,2\,x^2-5\,x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^3\left(3\,-\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3}=\infty,$$

јер иако делимо са 3,x^2 неограничено расте, па дељење не утиче много на њега (евентуално може да успори брзину раста, али крајњи резултат је ипак ∞!

Из овог примера закључујемо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1\,x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1\,x+b_0}=\begin{cases}\frac{a_n}{b_m}, & n=m\\ 0, & n<m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

*****

У општем случају, можемо посматрати шта се дешава са функцијом када x тежи и неком реалном броју, а не само бесконачности. Записиваћемо:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L,$$

што значи да како се x приближаваa, функција $f(x)$ се приближава L, где и a и L могу бити било који бројеви, али и бесконачно. Погледајмо следећи пример.

Пример 2.Израчунати лимесе следећих функција:

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 10\,x - 3}{5\,x^3 - 7\,x^2 + x + 1}$

б) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

Решење.

a)Уколико је функција дефинисана у тачки $x = 2$, тада је лимес функције када x тежи 2, заправо једнак вредности функције у тој тачки. Добијамо:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 10\,x - 3}{5\,x^3 - 7\,x^2 + x + 1} = \frac{2^3 + 10 \cdot 2 - 3}{5 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 2 + 1} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3}.$$

б)Ако сада пробамо да, као у претходном примеру, убацимо $x = 1$, добијамо израз $\frac{0}{0}$, о коме ништа не знамо. Погледајмо зато због чега добијамо тако неодређен резултат.

1. **начин:**Посматрамо бројилац и именилац посебно:

$x^2 + x - 2 = x^2 + (2\,x - x) - 2 =$	$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$
$x^2 + 2\,x - x - 2 = (x^2 - x) + (2\,x - 2) =$	(као разлика квадрата!)
$x(x-1) + 2(x-1) = (x-1)(x+2)$	

Добијамо:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$$

Сада је јасно да због појављивања чиниоца $(x-1)$ и у бројиоцу и у имениоцу, после убацивања$x = 1$, добијамо израз облика$\frac{0}{0}$. Међутим, после скраћивања, добијамо израз:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1},$$

који је дефинисан у тачки $x = 1$, па је ту вредност потребно само убацити у израз, као под a).

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}.$$

2. **начин:** Означимо $t = x - 1$, тада када $x \to 1$, очигледно $t \to 0$. Пошто је сада $x = t + 1$, наш лимес постаје:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \lim_{t\to0}\frac{(t+1)^2+(t+1)-2}{(t+1)^2-1} = \lim_{t\to0}\frac{t^2+3\,t}{t^2+2\,t} = \lim_{t\to0}\frac{t+3}{t+2} = \frac{0+3}{0+2} = \frac{3}{2}.$$

Из овог примера закључујемо:

Уколико се тражи лимес функције у некој тачки, у којој је функција дефинисана, тада је потребно израчунати вредност функције у тој тачки! У случају да функција ипак није дефинисана у тој тачки, па добијемо израз $\frac{0}{0}$, тада је прво потребно факторисати бројилац и именилац, а затим скратити заједнички чинилац, или увести смену!

*****

Лимес не постоји увек!

Лимес можемо тражити само у тачкама у чијој је околини функција дефинисана. Зато на пример не постоји $\lim_{x\to-5}\ln x$, јер логаритамска функција није дефинисана у околини негативних бројева.

Могуће је међутим, да функција буде дефинисана за сваки реалан број, а да опет нема лимес када x тежи бесконачно. Такав пример је $\sin x$, која стално осцилује горе-доле, али се у бесконачности не приближава ниједној конкретној тачки.

*****

Домаћи задаци - лимеси:

1. Наћи следеће лимесе:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+5\,x^7+3\,x^3+4\,x^5}{10\,x^2-1+15\,x^7+x}$

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

помоћ (ако мораш, погледај!):$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$(a+b)^3=a^3+3\,a^2b+3ab^2+b^3$$

2. (*) Уместо знака „#" уписати бројеве тако да буде тачно:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{15\,x^{13}+\#\cdot x^7+\#\cdot x^{17}+\#}{\#\cdot x^{13}-3x^{17}-5x^{10}+5}=5$$

Обратити пажњу да $x\to-\infty$!

помоћ: увести смену $t=-x$, па када $x\to-\infty$, имамо да$t\to\infty$.