Примена извода

Задатак:Тело се креће праволинијски по закону $s(t)=\frac{\mathrm{t}^3}{3}-\frac{3}{2}\mathrm{t}^2-4\mathrm{t}$, где је $s(t)$ пређени пут, за време t. Одредити средњу брзину после 10s, као и тренутну брзину у том тренутку.

Решење.Подсетимо се формуле за пређени пут током праволинијског, равномерно убрзаног кретања:$s=v_0t+\frac{at^2}{2}$, где је v_0 почетна брзина (која може бити и $0\ \frac{m}{s}$, уколико тело креће из мировања), t време, а aубрзање. То је општа формула и она важи за *свако*равномерно убрзано кретање. Међутим, нама је у задатку дата друга формула $s(t)=\frac{\mathrm{t}^3}{3}-\frac{3}{2}\mathrm{t}^2-4\mathrm{t}$. Ова формула није општа, она важи само у овом задатку. Као да је неко узео и мерио пређени пут посматраног тела у сваком тенутку и закључио да баш за ово тело, пут зависи од времена на тај начин $s(t)=\frac{\mathrm{t}^3}{3}-\frac{3}{2}\mathrm{t}^2-4\mathrm{t}$. То не значи да поменута општа формула $s=v_0t+\frac{at^2}{2}$ у овом задатку не важи, него нам само није од помоћи.

Размотримо сада шта нам формула $s(t)=\frac{\mathrm{t}^3}{3}-\frac{3}{2}\mathrm{t}^2-4\mathrm{t}$ говори. У тренутку $t=0\ s$, добијамо $s(t)=0\ m$, што значи да у почетном тренутку тело полази из *координарног почетка.* Нађимо најпре средњу брзину после 10s. Као што знамо, средња брзина је брзина, којом је тело могло да се креће дуж целог пута, без убрзавања или успоравања и да опет пређе исти пут. Дакле $v_{sr}=\frac{s}{t}=\frac{\frac{10^3}{3}-\frac{3}{2}10^2-4\cdot 10}{10}\approx 14.33\frac{m}{s}$.

Израчунајмо сада тренутну брзину. Дакле у нашем случају, тело због убрзања сваког тренутка мења брзину, и од нас се тражи да израчунамо брзину у тренутку $t=10\ s$. Посматрајмо зато положај тела у 2 тренутка:

1. тренутак: у тренутку $t_1=t=10s$, тело је прешло пут:

$$s_1=\frac{\mathrm{t}^3}{3}-\frac{3}{2}\mathrm{t}^2-4\mathrm{t}.$$

2. тренутак: у тренутку$t_2=(t+\Delta t)$, где $\Delta t\to 0$тело је прешло пут:

$$s_2=\frac{(t+\Delta t)^3}{3}-\frac{3}{2}(t+\Delta \mathrm{t})^2-4(t+\Delta \mathrm{t}).$$

Тренутна брзина је сада једнака:

$$v_{tr} = \frac{\Delta s}{t_2 - t_1} = \frac{s_2 - s_1}{(t + \Delta t) - t},$$

где $\Delta t \to 0$. То значи да посматрамо толико мали интервал, да можемо сматрати да се тело у том периоду између t_1 и t_2 креће равномерно, па можемо користити формулу $v_{tr} = \frac{\Delta s}{t_2 - t_1}$. Израчунајмо сада чему је то једнако:

$$v_{tr} = \frac{s_2 - s_1}{(t + \Delta t) - t} = \frac{\left(\frac{(t+\Delta t)^3}{3} - \frac{3}{2}(t+\Delta \mathrm{t})^2 - 4(t+\Delta t)\right) - \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 - 4t\right)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{\frac{t^3 + 3\,t^2 \cdot \Delta t + 3\,t \cdot (\Delta t)^2 + (\Delta t)^3}{3} - \frac{3}{2}(t^2 + 2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2) - 4t - 4\Delta t - \frac{t^3}{3} + \frac{3}{2}t^2 + 4t}{\Delta t},$$

што после свођења на заједнички именилац и скраћивања постаје:

$$v_{tr} = \frac{6t^2 \cdot \Delta t + 6t \cdot (\Delta t)^2 + 2(\Delta t)^3 - 18t \cdot \Delta t + 9(\Delta t)^2 - 24\Delta t}{6\,\Delta t}$$

$$= t^2 + t \cdot \Delta t + \frac{1}{3}(\Delta t)^2 - 3t + \frac{3}{2}\Delta t - 4.$$

Међутим, како $\Delta t \to 0$, то све чланове који садрже Δt можемо занемарити, па остаје само:

$$v_{tr} = t^2 - 3t - 4 = 10^2 - 3 \cdot 10 - 4 = 66s.$$

Ако сада мало боље погледамо, видећемо да смо ми рачунали следеће:

$$v_{tr} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

што је заправо извод! И заиста, ако погледамо шта је извод почетне функције пута, посматрајући t као променљиву у функцији, имамо:

$$s' = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3}{2}t^2 - 4t\right)' = \frac{3\,t^{3-1}}{3} - \frac{3}{2} \cdot 2\,t^{2-1} - 4\,t^{1-1} = t^2 - 3t - 4,$$

што је управо оно што смо ми добили.

Закључујемо: Тренутна брзина је извод пређеног пута, када се време посматра као променљива.