Примена интеграла

Задатак: Тело се креће праволинијски брзином $v(t) = 2\mathrm{t}^3 - \mathrm{t}^2 - 4\mathrm{t} + 1$ у функцији од времена. Одредити пређени пут тела после 15s.

Решење. Знамо да је $v = \frac{ds}{dt}$, тј. да је брзина први извод пређеног пута по времену. Дакле, уколико нам је позната зависност пута по времену по којој се тело креће, можемо лако да одредимо тренутну брзину тела у сваком моменту. Међутим, овде је случај обрнут: позната нам је зависност брзине од времена и временски интервал на ком треба наћи пређени пут.

Да је брзина у интервалу времена константна, лако бисмо пронашли пређени пут као $s = v\,\Delta t$. Али, пошто је брзина у интервалу времена промењива, поделићемо укупан интервал на n подинтервала, тако да у сваком брзина буде константна. У том случају, укупан пређени пут биће сума свих путева на подинтервалима:

$$s = \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\ \Delta t_k$$

Ова сума је приближна вредност пута и њена тачност зависи од броја и дужина подинтервала на који смо поделили дати интервал. То значи да ће сума бити тачнија уколико дужина сваког подинтервала буде што мања, тј. када $\Delta t_k \to 0$, односно када број интервала $\mathrm{n} \to \infty$. Дакле, можемо записати и овако:

$$\lim s = \lim_{\substack{\mathrm{n}\to\infty \\ \Delta t_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\ \Delta t_k$$

Ова гранична вредност представља одређени интеграл од почетног до крајњег временског тренутка и записује се на следећи начин:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,\mathrm{d}t$$

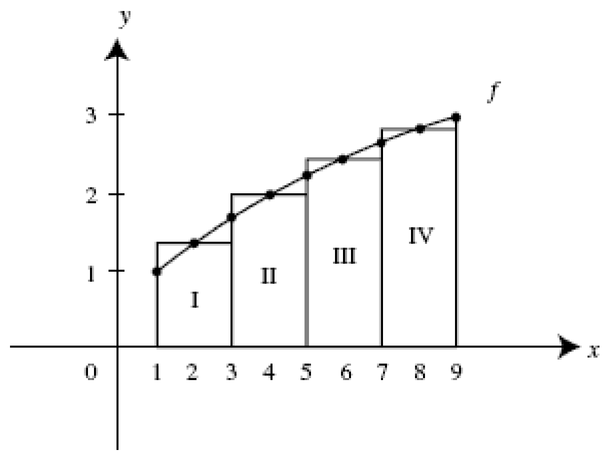
Сада можемо израчунати тражени пут. Дати временски интервал је $15s$, почиње од нултог тренутка $t_1 = 0$ и траје до $t_2 = 15s$:

$$s = \int_{0}^{15s} (2\mathrm{t}^3 - \mathrm{t}^2 - 4\mathrm{t} + 1)\,\mathrm{d}t,$$

из чега следи:

$$s = (\frac{1}{2}15^4 - \frac{15^3}{3} - 2 \cdot 15^2 + 15) = 23\,752{,}5m.$$

Задатак се може посматрати и на други начин. Познато је да је површина испод функције брзине у зависности од времена на $v - t$ дијаграму једнака пређеном путу тела. Та функција нам је позната, тако једино што треба да урадимо јесте да израчунамо површину испод ње на интервалу од 0 до 15s. Задата функција је крива и да бисмо израчунали површину, потребно је да је поделимо на низ правоугаоника које ћемо потом сабрати (по угледну на пример на слици).



Површина једног правоугаоника износи $v(t_k)\Delta t_k$, а сума свих је:

$$s = \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\ \Delta t_k$$

Као и у претходном случају, и овде примећујемо да ће израчунати пређени пут бити тачнији уколико број правоугаоника буде већи и уколико подела на хоризонталној оси (на којој је у нашем случају обележено време) буде мања. То значи да поново можемо написати граничну вредност:

$$\lim s = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \Delta t_k \to 0}} \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\ \Delta t_k,$$

из које проистиче интеграл

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\ \mathrm{d}t$$

Даљи поступак при решавању је исти.